

## **РОЗРОБКА ДОДАТКУ ДЛЯ ДОСЛІДЖЕННЯ LV-МОДЕЛІ З УРАХУВАННЯМ ПРОСТОРОВОГО ФАКТОРА ЗАСОБАМИ PYTHON**

**Краснощок Максим**

**Науковий керівник: доктор фіз.-мат. наук, професор Плічко А.М.**

*Центральноукраїнський державний університет імені Володимира Винниченка,  
м. Кропивницький, Україна*

*У статті розглядається актуальна задача комп'ютерного моделювання просторово-часової динаміки екологічних систем типу «хижак-жертва». Обґрунтовано необхідність врахування просторового фактора та дифузійного переміщення популяції для адекватного опису процесів самоорганізації в екосистемах. Проведено математичну постановку задачі у вигляді системи диференціальних рівнянь у частинних похідних типу «реакція-дифузія» на базі моделі Лотки-Вольтерри. Розроблено та реалізовано чисельний алгоритм розв'язання системи методом скінченних різниць із використанням явної схеми інтегрування. Створено інтерактивний програмний комплекс мовою Python із використанням бібліотек NumPy та Matplotlib, який дозволяє проводити обчислювальні експерименти в режимі реального часу. Експериментально підтверджено виникнення дифузійно-керованої нестійкості та формування стійких дисипативних структур (патернів Тюрінга).*

*Ключові слова: математичне моделювання, система «реакція-дифузія», модель Лотки-Вольтерри, патерни Тюрінга, Python, чисельні методи.*

### **Development of an application for investigating the LV-model considering the spatial factor using Python**

**M. Krasnoshchok**

**Scientific supervisor: Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor Plichko A.M.**

*Volodymyr Vynnychenko Central Ukrainian State University, Kropyvnytsky, Ukraine*

*The article addresses the urgent task of computer modeling of spatio-temporal dynamics in ecological "predator-prey" systems. The necessity of considering the spatial factor and diffusive movement of populations for an adequate description of self-organization processes in ecosystems is substantiated. The mathematical formulation of the problem is carried out as a system of partial differential equations of the "reaction-diffusion" type based on the Lotka-Volterra model. A numerical algorithm for solving the system by the finite difference method using an explicit integration scheme is developed and implemented. An interactive software complex in Python utilizing NumPy and Matplotlib libraries is created, allowing for real-time computational experiments. The occurrence of*

*diffusion-driven instability and the formation of stable dissipative structures (Turing patterns) are experimentally confirmed.*

*Keywords: mathematical modeling, reaction-diffusion system, Lotka-Volterra model, Turing patterns, Python, numerical methods.*

**Постановка проблеми.** У сучасній екології та математичній біології одним із ключових завдань є дослідження механізмів самоорганізації складних систем та прогнозування динаміки популяцій в умовах змінного навколишнього середовища. Класичні математичні моделі взаємодії видів, зокрема базова модель Лотки-Вольтерри, традиційно розглядаються у вигляді систем звичайних диференціальних рівнянь. Такий підхід базується на припущенні про ідеальне переміщення особин та гомогенність середовища існування, що дозволяє нехтувати просторовим розподілом популяцій. Проте у реальних екосистемах взаємодія між хижаком та жертвою завжди відбувається у просторі, а процеси міграції та дифузії відіграють критичну роль у виживанні видів. Ігнорування просторового фактора часто призводить до неможливості пояснення ряду спостережуваних природних феноменів, таких як виникнення стійких плямистих структур, хвиль поширення життя або формування локальних ареалів проживання.

Перехід від точкових моделей до просторово-розподілених систем, що описуються диференціальними рівняннями у частинних похідних типу «реакція-дифузія», дозволяє значно наблизити математичний опис до реальності. Водночас, такий перехід породжує проблему високої обчислювальної складності. Аналітичне розв'язання таких нелінійних систем у загальному вигляді є неможливим, що зумовлює необхідність застосування чисельних методів. Це, у свою чергу, висуває нові вимоги до програмного інструментарію. Існує нагальна потреба у створенні спеціалізованого програмного забезпечення, яке б дозволяло не лише чисельно розв'язувати відповідні рівняння, але й забезпечувало б інтерактивну візуалізацію процесів формування просторових патернів у режимі реального часу. Актуальність розробки таких додатків засобами сучасних високорівневих мов програмування, таких як Python, зумовлена необхідністю

надання дослідникам гнучкого, відкритого та ефективного інструменту для проведення обчислювальних експериментів.

**Аналіз досліджень і публікацій.** Фундаментальні основи математичного моделювання процесів самоорганізації у нелінійних середовищах були закладені у класичній праці А. Тюрінга [8]. Він вперше довів, що у системі з двох реагуючих речовин, що дифундують з різними швидкостями, може виникати явище дифузійно-керованої нестійкості, яке призводить до формування стаціонарних просторових структур (патернів). Ці ідеї набули широкого розвитку в математичній екології, зокрема у працях Дж. Д. Мюррея та М. Льюїса [5], де механізми «реакція-дифузія» були застосовані для пояснення формування територій хижаків та забарвлення тварин.

Сучасний стан проблематики характеризується дослідженням більш складних модифікацій базових моделей. У оглядовій роботі [2] проаналізовано вплив нелінійних функціональних відгуків та насичення на динаміку екосистем. Значна увага приділяється врахуванню ефектів перехресної дифузії (cross-diffusion), коли потік популяції залежить від градієнта іншого виду, що досліджувалося у роботі [1]. Також актуальним напрямком є інтеграція поведінкових аспектів, таких як «ефект страху» у жертв [9], що суттєво змінює умови виникнення патернів.

Критично важливим аспектом є чисельна реалізація таких моделей, оскільки системи рівнянь у частинних похідних, як правило, не мають аналітичних розв'язків. Порівняльний аналіз чисельних схем для задач типу «реакція-дифузія» наведено у [7], де показано переваги та обмеження методу скінченних різниць. Питання оптимізації обчислень для просторових екологічних моделей розглядаються у [10], де автори наголошують на необхідності використання високопродуктивних підходів.

У контексті програмної реалізації де-факто стандартом наукових обчислень стає екосистема мови Python. Фундаментальна бібліотека NumPy [3] забезпечує ефективну роботу з багатовимірними масивами завдяки векторизації операцій, що дозволяє наблизити швидкість виконання інтерпретованого коду до

компільованих мов C/Fortran. Для візуалізації результатів моделювання традиційно використовується бібліотека Matplotlib [4], яка надає інструменти для побудови складних двовимірних полів концентрацій. Побудова графічних інтерфейсів для наукових додатків на базі Python часто реалізується за допомогою бібліотеки Tkinter [6], що забезпечує простоту інтеграції та кросплатформність. Незважаючи на значну кількість теоретичних праць, існує потреба у створенні доступних, відкритих програмних комплексів, які б інтегрували сучасні математичні моделі та ефективні засоби візуалізації для проведення інтерактивних досліджень.

**Метою статті** є розробка методики та програмного інструментарію для чисельного моделювання та візуального аналізу процесів самоорганізації в екологічних системах «хижак-жертва» з урахуванням просторового розподілу популяцій. Дослідження спрямоване на створення ефективного обчислювального алгоритму розв'язання системи диференціальних рівнянь у частинних похідних на основі методу скінченних різниць та його програмну реалізацію у вигляді інтерактивного додатку мовою Python. Ключовим завданням є забезпечення можливості проведення обчислювальних експериментів у режимі реального часу для визначення умов виникнення дифузійно-керованої нестійкості та дослідження топології дисипативних структур, що формуються внаслідок взаємодії кінетичних та дифузійних процесів.

**Виклад основного матеріалу (результатів) дослідження.** Математичною основою розробленого програмного комплексу є просторово-розподілена модель взаємодії біологічних видів, що базується на системі рівнянь Лотки-Вольтерри.

На відміну від класичного точкового наближення, яке розглядає лише часову еволюцію чисельності популяцій, у даному дослідженні враховано просторовий розподіл жертв та хижаків у двовимірному ареалі. Динаміка системи описується системою нелінійних диференціальних рівнянь у частинних похідних типу реакція-дифузія, де швидкість зміни локальної щільності популяції у кожній точці простору визначається сумою двох складових. Перша складова, реакційна, характеризує локальну міжвидову взаємодію, включаючи

процеси розмноження жертв, їх виїдання хижаками та природну смертність хижаків. Друга складова, дифузійна, описує випадкове переміщення особин територією і математично задається добутком коефіцієнта дифузії на оператор Лапласа від функції щільності. Для моделювання замкненої екосистеми, з якої неможлива міграція назовні, на межах прямокутної розрахункової області задано граничні умови Неймана, що відповідають нульовому потоку речовини через кордон. Початковий стан системи задається як мале випадкове збурення стаціонарного стану рівноваги, що дозволяє дослідити умови втрати стійкості однорідного розподілу.

Для чисельного розв'язання сформульованої початково-крайової задачі застосовано метод скінченних різниць, який дозволяє перейти від неперервного опису до дискретної моделі на просторовій сітці. Неперервний простір апроксимується двовимірною сіткою вузлів, а диференціальні оператори замінюються їхніми різницеvими аналогами. Апроксимація оператора Лапласа, що відповідає за дифузійне розповсюдження, виконується за п'ятиточковим шаблоном, використовуючи значення у центральному вузлі та чотирьох його найближчих сусідах. Інтегрування системи за часом реалізовано за допомогою явної схеми Ейлера першого порядку точності. Незважаючи на умовну стійкість даної схеми, яка накладає обмеження на величину часового кроку відповідно до критерію Куранта-Фрідрікса-Леві, її використання є виправданим завдяки простоті програмної реалізації та можливості ефективного розпаралелювання обчислень.

Програмна реалізація алгоритму виконана мовою високого рівня Python із використанням бібліотеки наукових обчислень NumPy. Ключовою особливістю розробленого обчислювального ядра є повна відмова від використання ітеративних циклів для обходу вузлів просторової сітки, що є критично важливим для інтерпретованих мов програмування. Замість цього застосовано підхід векторизації обчислень, де операції виконуються над цілими масивами даних одночасно. Зокрема, розрахунок дискретного лапласіана реалізовано через механізм циклічних зсувів масивів, що дозволяє обчислювати дифузійні потоки

для всієї розрахункової області за одну матричну операцію. Такий підхід забезпечив високу продуктивність додатку, дозволяючи проводити симуляцію еволюції системи на сітках великої розмірності у режимі реального часу. Для візуалізації результатів використано бібліотеку Matplotlib, інтегровану у графічний інтерфейс на базі Tkinter, що надає користувачеві можливість інтерактивно змінювати параметри моделі та миттєво спостерігати їх вплив на динаміку системи.

Результати проведених обчислювальних експериментів підтвердили адекватність побудованої моделі та ефективність розробленого інструментарію. На першому етапі було верифіковано стійкість системи у випадку рівних коефіцієнтів дифузії хижака та жертви. Моделювання показало, що за таких умов будь-які початкові просторові неоднорідності з часом згладжуються, і система переходить у гомогенний стаціонарний стан. Це узгоджується з теоретичними положеннями про те, що дифузія зазвичай виступає стабілізуючим фактором. На другому етапі було відтворено ефект дифузійно-керованої нестійкості, передбачений А. Тюрінгом. При встановленні коефіцієнта дифузії хижака значно більшим за коефіцієнт дифузії жертви спостерігалось спонтанне порушення симетрії. Малі випадкові флуктуації щільності не загасали, а, навпаки, підсилювалися, призводячи до формування стійких у часі просторових структур. Отримані патерни мали вигляд ізольованих плям високої концентрації жертв, оточених зонами домінування хижаків, або лабіринтоподібних смуг, залежно від обраних значень коефіцієнтів народжуваності та смертності. Також було зафіксовано перехід системи до режиму динамічного хаосу при значному відхиленні параметрів від точки біфуркації. Отримані результати демонструють, що розроблений програмний комплекс є ефективним інструментом для дослідження процесів самоорганізації в екологічних системах.

### **Висновки та перспективи подальших пошуків у напрямі дослідження.**

У результаті виконання роботи вирішено науково-прикладну задачу створення програмного інструментарію для моделювання просторових ефектів у динаміці екологічних популяцій. Розроблений інтерактивний додаток довів свою

ефективність як засіб для дослідження складних нелінійних процесів самоорганізації, що виникають у системах типу реакція-дифузія. Головним науковим підсумком роботи є підтвердження можливості використання сучасних високорівневих мов програмування, зокрема Python, для розв'язання ресурсномістких задач математичної фізики без втрати продуктивності, за умови застосування векторизованих обчислювальних підходів. Реалізована архітектура програмного комплексу дозволила успішно відтворити феномен дифузійно-керованої нестійкості та провести детальний параметричний аналіз умов виникнення патернів Тюрінга, що підтверджує адекватність обраної математичної моделі та коректність застосованого чисельного методу.

Експериментально встановлено, що критичним фактором для формування стійких просторових структур є значна відмінність у коефіцієнтах дифузії взаємодіючих видів, а топологія утворюваних патернів чутливо залежить від кінетичних параметрів локальної взаємодії. Отримані результати мають важливе значення не лише для теоретичної екології, дозволяючи глибше зрозуміти механізми виживання популяцій через просторову сегрегацію, але й для освітнього процесу, надаючи наочний інструмент для візуалізації складних математичних концепцій. Розроблений програмний продукт може бути безпосередньо впроваджений у навчальні курси з математичного моделювання та обчислювальної біології як віртуальна лабораторія для проведення студентами самостійних досліджень.

Перспективи подальших наукових пошуків у даному напрямі пов'язані з розширенням функціональних можливостей моделі та підвищенням обчислювальної ефективності алгоритмів. Актуальним завданням є перехід від двовидової моделі до більш складних трофічних ланцюгів та мереж, що включають три і більше компонентів, що дозволить досліджувати явища хаосу та конкуренції у багатовимірних фазових просторах. Важливим напрямком є врахування гетерогенності середовища існування шляхом введення просторово-залежних коефіцієнтів дифузії та ємності середовища, що наблизить модель до реальних природних умов. З точки зору обчислювальних методів, перспективним

вбачається імплементація неявних або напівнеявних різницевих схем (наприклад, методу змінних напрямків), що дозволить зняти жорсткі обмеження на крок інтегрування за часом та значно прискорити симуляцію. Крім того, для моделювання на сітках надвисокої роздільної здатності доцільним є перенесення обчислювального ядра на графічні процесори з використанням технологій паралельних обчислень.

#### **Список використаної літератури:**

1. Banerjee M., E. S., Sarkar S. Cross-diffusion-induced subharmonic spatial resonances in a predator-prey system // *Physical Review E*. — 2018. — Vol. 97, No. 1. — Art. 012220.
2. Calsina À., Farkas J. Z., Zohdi F. Predator–Prey Models: A Review of Some Recent Advances // *Mathematics*. — 2021. — Vol. 9, No. 15. — Art. 1783.
3. Harris C. R., Millman K. J., van der Walt S. J. et al. Array programming with NumPy // *Nature*. — 2020. — Vol. 585. — P. 357–362.
4. Hunter J. D. Matplotlib: A 2D graphics environment // *Computing in Science & Engineering*. — 2007. — Vol. 9, No. 3. — P. 90–95.
5. Lewis M. A., Murray J. D. Pattern formation in wolf territories // *Nature*. — 1993. — Vol. 361. — P. 526–528.
6. Roseman M. *Modern Tkinter for Busy Python Developers*. — Createspace Independent Pub, 2017. — 182 p.
7. Sanchez O., Plaza A. J., de-Miguel F. F., Morillas F. A comparison of numerical schemes for the solution of reaction-diffusion systems in predator-prey models // *Applied Mathematics and Computation*. — 2014. — Vol. 231. — P. 444–453.
8. Turing A. M. The chemical basis of morphogenesis // *Philosophical Transactions of the Royal Society B*. — 1952. — Vol. 237, No. 641. — P. 37–72.
9. Wang X., Liu X., Li Y. Pattern formation of a predator-prey model with the cost of anti-predator behaviors // *Mathematical Biosciences and Engineering*. — 2018. — Vol. 15, No. 3. — P. 775–805.
10. Zhang S., Liu M., Zhang G. High-performance computing for a spatial predator-prey system using GPU // *Computers & Mathematics with Applications*. — 2017. — Vol. 73, No. 11. — P. 2384–2398.

#### **Відомості про автора:**

*Краснощок Максим Валентинович – студент II курсу магістратури факультету інформаційних технологій, математики та природничих наук Центральноукраїнського*



*державного університету імені Володимира Винниченка, тел. +380979808013, e-mail:  
12072620@cuspu.edu.ua.*