

УДК 512.74

РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЛОГАРИФМІЧНИХ НЕРІВНОСТЕЙ

Ярослава Королько, Ярослав Левицький

Черкаський національний університет імені Богдана Хмельницького,

м. Черкаси, Україна

У статті наводиться загальний алгоритм розв'язування логарифмічних нерівностей. Висвітлено застосування цього алгоритму до типових прикладів із шкільних підручників авторів: Істер, Мерзляк, Бевз. Продемонстровано застосування алгоритму до розв'язання логарифмічних нерівностей, які зустрічаються на зовнішньому незалежному оцінюванні та національному мультипредметному тесті з математики. Наведено методичні рекомендації щодо розв'язування логарифмічних нерівностей. Матеріал може бути використаний для підготовки старшокласників складання НМТ з математики.

Ключові слова: *логарифмічна нерівність, перетин, аргумент логарифма, алгоритм розв'язування, властивості логарифмічних функцій.*

SOLVING LOGARITHMIC INEQUALITIES

Y. Korolko, Y. Levitskiy

Cherkasy National University named after Bohdan Khmelnytskyi, Cherkasy, Ukraine

The article presents a general algorithm for solving logarithmic inequalities. The application of this algorithm to typical examples from school textbooks by the authors: Ister, Merzlyak, Bevez is highlighted. The application of the algorithm to solving logarithmic inequalities that occur in external independent assessment and the national multi-subject test in mathematics is demonstrated. Methodological recommendations for solving logarithmic inequalities are given. The material can be used to prepare high school students for the NMT in mathematics

Key words: *logarithmic inequality, intersection, argument of logarithm, solution algorithm, properties of logarithmic functions*

Постановка проблеми. У шкільному курсі математики розв'язування логарифмічних нерівностей є однією з найбільш складних тем для учнів старших класів. Багато учнів не засвоюють типові правила роботи з логарифмами, які викладаються в підручниках, що ускладнює процес розв'язування задач. Додаткові труднощі виникають при переході від логарифмічної нерівності до стандартної алгебраїчної, зокрема учні забувають змінювати знак нерівності,

коли основа логарифма знаходиться в інтервалі від нуля до одиниці, а також ігнорують обов'язкове врахування області допустимих значень (ОДЗ), що є надважливим для правильного розв'язку. Недостатнє розуміння властивостей логарифмічних функцій ускладнює застосування алгоритмів розв'язання, внаслідок чого ефективність навчання теми знижується, а учні допускають систематичні помилки. Вкрай необхідно розробити методичку, яка допоможе учням старших класів правильно розв'язувати логарифмічні нерівності та уникати типових помилок.

Аналіз досліджень і публікацій. Проблема розв'язування логарифмічних нерівностей розглядається в кожному шкільному підручнику 11-го класу з математики, незалежно від рівня навчання - стандартного, профільного чи поглибленого. Автори [1], [2], [5] пропонують різні підходи до розв'язування таких нерівностей, класифікують їх за видами, надають алгоритми розв'язування та числові й текстові приклади, що дозволяє учням наочно побачити застосування теоретичних знань на практиці.

Проте аналіз сучасних підручників показує, що запропоновані методики не завжди ефективні для формування стійких навичок розв'язування логарифмічних нерівностей у старших класах. Учні часто стикаються з труднощами, пов'язаними з недосконалим засвоєнням алгоритмів, ігноруванням області допустимих значень (ОДЗ), а також неправильною зміною знаку нерівності при основі логарифма, що лежить у межах від нуля до одиниці. У підручниках рідко робиться акцент на типових помилках учнів та на практичних стратегіях їх уникнення, що обмежує ефективність навчання.

Таким чином, попри те що шкільні підручники містять базові алгоритми і класифікації логарифмічних нерівностей, існує потреба в розробці методик, які допоможуть учням системно формувати навички розв'язування, враховуючи ОДЗ та мінімізувати помилки, пов'язані з неправильною роботою з основою логарифма та іншими нюансами.

Метою статті є розробка ефективної методики, яка допоможе учням старших класів правильно розв'язувати логарифмічні нерівності, враховувати область допустимих значень, змінювати знак нерівності при основі логарифма від нуля до одиниці та уникати типових помилок, що виникають у процесі навчання.

Виклад основного матеріалу. Запропонуємо підхід, за яким будемо розв'язувати логарифмічні нерівності:

Крок 1. Область допустимих значень.

Крок 2. Нерівність.

Крок 3. Перетин(кроку 1 та кроку 2). Під перетином будемо розуміти “чистий” розв'язок логарифмічної нерівності, який нам треба буде отримати.

Додатково слід зауважити, що коли основа логарифма в межах від нуля до одиниці ми змінюємо знак нерівності на протилежний, а коли основа логарифма більша одиниці, ми не змінюємо знак нерівності (залишаємо таким, як є). Проаналізуємо і виберемо коло задачного матеріалу із шкільних підручників Математики рівня стандарт для 11-х класів авторів: Істер, Мерзляк, Бевз [1], [2], [5]. Додатково здійснимо аналіз ЗНО та НМТ попередніх років й продемонструємо, що даний підхід буде ідеально працювати з завданнями НМТ та ЗНО. Акцент при виборі завдань із шкільних підручників робиться виключно на тих завданнях, які пропонували на НМТ та ЗНО.

Задача 1. (Істер №7.5(1)) [2]. Розв'яжіть нерівність: $\log_4(x-1) \geq 2$

Розв'язання

Крок 1. ОДЗ: $x-1 > 0 \leftrightarrow x > 1$

Крок 2. Нерівність: $\log_4(x-1) \geq 2 \leftrightarrow \log_4(x-1) \geq 2 \cdot \log_4 4 \leftrightarrow \log_4(x-1) \geq \log_4 16$

Звідки: $x-1 \geq 16 \leftrightarrow x \geq 17$

Крок 3. Перетин: $x \in [17; +\infty)$. Відповідь: $x \in [17; +\infty)$

Задача 2. (Істер №7.5(3)) [2]. Розв'яжіть нерівність: $\log_{\frac{1}{2}}(x+2) > -3$

Розв'язання

Крок 1. ОДЗ: $x+2 > 0 \leftrightarrow x > -2$

Крок 2. Нерівність: $\log_{\frac{1}{2}}(x+2) > -3 \leftrightarrow \log_{\frac{1}{2}}(x+2) > \log_{\frac{1}{2}} 8$

Звідки: $x+2 < 8 \leftrightarrow x < 6$

Крок 3. Перетин: $x \in (-2;6)$. Відповідь: $x \in (-2;6)$.

Задача 3. (Мерзляк №7.2(2)) [5]. Розв'яжіть нерівність: $\log_{\frac{5}{6}} x > \log_{\frac{5}{6}} \frac{6}{7}$

Розв'язання

Крок 1. ОДЗ: $x > 0$

Крок 2. Нерівність: $\log_{\frac{5}{6}} x > \log_{\frac{5}{6}} \frac{6}{7} \leftrightarrow x < \frac{6}{7}$

Крок 3. Перетин: $x \in \left(0; \frac{6}{7}\right)$. Відповідь: $x \in \left(0; \frac{6}{7}\right)$.

Задача 4. (Мерзляк №7.2(3)) [5]. Розв'яжіть нерівність: $\log_{12}(x-8) > \log_{12} 3$

Розв'язання

Крок 1. ОДЗ: $x-8 > 0 \leftrightarrow x > 8$

Крок 2. Нерівність: $\log_{12}(x-8) > \log_{12} 3 \leftrightarrow x-8 > 3 \leftrightarrow x > 11$

Крок 3. Перетин: $x \in (11; +\infty)$. Відповідь: $x \in (11; +\infty)$.

Задача 5. (Бевз №165(а)) [1]. Розв'яжіть нерівність: $\log_3(x-7) < 3$

Розв'язання

Крок 1. ОДЗ: $x-7 > 0 \leftrightarrow x > 7$

Крок 2. Нерівність: $\log_3(x-7) < 3 \leftrightarrow \log_3(x-7) < \log_3 27 \leftrightarrow x-7 < 27 \leftrightarrow x < 34$

Крок 3. Перетин: $x \in (11;34)$. Відповідь: $x \in (11;34)$.

Задача 6. (Бевз № 165(б)) [1]. Розв'яжіть нерівність: $\log_3(x+1) < -2$

Розв'язання

Крок 1. ОДЗ: $x+1 > 0 \leftrightarrow x > -1$

Крок 2. Нерівність: $\log_3(x+1) < -2 \Leftrightarrow \log_3(x+1) < \log_3 \frac{1}{9} \Leftrightarrow x < -\frac{8}{9}$

Крок 3. Перетин: $x \in \left(-1; -\frac{8}{9}\right)$. Відповідь: $x \in \left(-1; -\frac{8}{9}\right)$.

Аналогічно розв'язуємо задачу №163(в) із підручника Бевз.

Задача 7. (Зовнішнє незалежне оцінювання 2008, завдання 14). Розв'яжіть нерівність: $\log_{0,5} 5 < \log_{0,5} x$

Розв'язання

Крок 1. ОДЗ: $x > 0$

Крок 2. Нерівність: $\log_{0,5} 5 < \log_{0,5} x \Leftrightarrow 5 > x \Leftrightarrow x < 5$

Крок 3. Перетин: $x \in (0; 5)$. Відповідь: $x \in (0; 5)$.

Задача 8. (Національний мультипредметний тест, 2022). Розв'яжіть нерівність: $\log_{0,3}(x+3) > \log_{0,3} 4$

Розв'язання

Крок 1. ОДЗ: $x+3 > 0 \Leftrightarrow x > -3$

Крок 2. Нерівність: $\log_{0,3}(x+3) > \log_{0,3} 4 \Leftrightarrow x+3 < 4 \Leftrightarrow x < 1$

Крок 3. Перетин: $x \in (-3; 1)$. Відповідь: $x \in (-3; 1)$.

Як бути, коли ОДЗ складається не з однієї нерівності? Робимо систему й окремо знаходимо ОДЗ, проаналізуємо такі завдання в шкільних підручниках з Математики:

Задача 9. (Істер № 7.7(2)) [2]. Розв'яжіть нерівність: $\log_5(x+1) > \log_5(3-x)$

Розв'язання

Крок 1. ОДЗ: $\begin{cases} x+1 > 0 \\ 3-x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -1 \\ x < 3 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (-1; 3)$

Крок 2. Нерівність: $\log_5(x+1) > \log_5(3-x) \Leftrightarrow x+1 > 3-x \Leftrightarrow x > 1$

Крок 3. Перетин: $x \in (1; 3)$. Відповідь: $x \in (1; 3)$.

Задача 10 (Мерзляк №7.7(4)) [5].

Розв'яжіть нерівність: $\log_{0,4}(x^2 - 3) < \log_{0,4}(x + 3)$

Розв'язання

Крок 1. ОДЗ: $\begin{cases} x^2 - 3 > 0 \\ x + 3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (-3; \sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}; +\infty)$

Крок 2. Нерівність: $\log_{0,4}(x^2 - 3) < \log_{0,4}(x + 3) \Leftrightarrow x^2 - x - 6 > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty; -2) \cup (3; +\infty)$

Крок 3. Перетин: $x \in (-3; -2) \cup (3; +\infty)$. Відповідь: $x \in (-3; -2) \cup (3; +\infty)$.

У кроці 1 ми шукаємо область допустимих значень для усіх логарифмів (а не для якогось одного), адже в старших класах є велика необхідність у повторенні навчального матеріалу [4],[5], який вивчався до логарифмічних нерівностей, а саме: розв'язування лінійних нерівностей, що є вкрай необхідним при підготовці учнів до НМТ. Саме у цей спосіб учні ніколи не помиляться з тим ОДЗ, яке можна відкинути, ніколи не зроблять помилку при розв'язанні логарифмічної нерівності. По-суті, ніколи не треба думати, яке саме ОДЗ слід робити в логарифмічній нерівності, робимо усі ОДЗ, а потім шукаємо перетин ОДЗ з нерівністю.

Апробація результатів. Під час написання даної статті була проведена апробація. Апробація цього дослідження була здійснена з учнями 11-А (філологічного профілю), Б (історичного профілю), Д (технологічного профілю) класів комунального закладу «Ліцей «Науковий» КМР», які вивчають Математику за рівнем стандарт вчителем комунального закладу «Ліцей «Науковий» КМР» Ярославом Левицьким.

Учням пропонувався підхід, описаний у статті, для розв'язання нерівностей з шкільного підручника математики (Істер). В якості домашнього завдання пропонувалися завдання з інших підручників (Мерзляк, Бевз). Контроль знань у вигляді контрольної роботи у форматі НМТ (серед тих, хто писав даний вид роботи) показав наступні результати: 11А (18 осіб – високий; 3 особи достатній та лише 2 особи середній рівень навчальних досягнень); 11Б (15 осіб – високий; 4 особи достатній; 1 особа середній та 1 особа початковий рівень

навчальних досягнень); 11Д (12 осіб – високий; 6 осіб – достатній та 2 особи початковий рівень навчальних досягнень). Варто відмітити, що у контрольній роботі учням пропонувалися нерівності, схожі до нерівностей, які розв’язані у даній статті. Акцент робився саме на ті нерівності, які зустрічаються на ЗНО та НМТ з математики.

Висновки. Проведене дослідження дає підстави вважати ефективною методику розв’язування логарифмічних нерівностей у старших класах, які вивчають математику за рівнем стандарт у ліцях України. У даний спосіб можна розв’язати більшість логарифмічних нерівностей й не допустити помилку(особливо із ОДЗ). Складність може полягати тільки у самих нерівностях в ОДЗ(наприклад, коли буде квадратична нерівність з «негарними» коренями). Проведений детальний аналіз завдань(логарифмічних нерівностей) ЗНО та НМТ свідчить, що даний спосіб є дуже корисним для старшокласників та стане їм у нагоді не тільки при підготовці до НМТ, а і при його складанні). Матеріал даної статті стане у нагоді учням та їх викладачам, усі матеріали даної статті можна використовувати при роботі з учнями в ліцях України.

Список використаної літератури.

1. Бевз Г.П., Бевз В.Г. Математика: алгебра і початки аналізу та геометрія. Рівень стандарту: підруч. для 11 кл. закладів загальної середньої освіти. Київ: Освіта, 2019. 272 с.
2. Істер О.С. Математика : (алгебра і початки аналізу та геометрія, рівень стандарту) : підруч. для 11-го кл. закл. заг. серед. освіти. Київ : Генеза, 2019. 304 с.
3. Левицький Я.В. Складання задач з параметром з використанням графічного калькулятора DESMOS. *Наукові записки молодих учених*. 2021. № 8. Електронний ресурс: <https://phm.cuspu.edu.ua/ojs/index.php/SNYS/article/view/1902>
4. Левицький Я.В. Розв’язування рівнянь та нерівностей з параметром. *Наукові записки молодих учених*. 2019. № 3. Електронний ресурс: <https://phm.cuspu.edu.ua/ojs/index.php/SNYS/article/view/1622>
5. Мерзляк А.Г., Номіровський Д.А., Полонський В.Б. Математика : алгебра і початки аналізу та геометрія, рівень стандарту : підруч. для 11 кл. закладів загальної середньої освіти. Х. : Гімназія, 2019. 208 с.

Відомості про авторів

Королько Ярослава Анатоліївна – студентка I курсу інформаційних та освітніх технологій Черкаського національного університету імені Богдана Хмельницького, тел. +380662507716, e-mail: aroslavakorolko@gmail.com , м. Черкаси.

Левицький Ярослав В'ячеславович – вчитель математики КЗ «Ліцей «Науковий» КМР», тел. +380665917692, e-mail: yarik1999lev@gmail.com , м. Кропивницький