УДК 374.951

ЦИКЛИ ВПРАВ ДЛЯ НАВЧАННЯ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ РІВНЯНЬ ТА НЕРІВНОСТЕЙ З ПАРАМЕТРАМИ

Чалий Сергій, Яременко Юрій

Центральноукраїнський державний університет імені Володимира Винниченка, м. Кропивницький, Україна

У статті обґрунтовано значення системного підходу до навчання теми «Рівняння та нерівності з параметрами». Подано методику побудови циклів вправ, спрямованих на формування в учнів аналітичного мислення та умінь досліджувати залежності між змінними. Розкрито структуру циклів, що поєднують орієнтаційні, базові, аналітичні та узагальнювальні завдання, а також наведено приклади практико-орієнтованих і творчих вправ.

Ключові слова: цикли вправ, параметр, рівняння, нерівність, аналітичне мислення, методика навчання.

SETS OF EXERCISES FOR TEACHING THE SOLUTION OF EQUATIONS AND INEQUALITIES WITH PARAMETERS

Serhii Chalyi, Yu.V.Yaremenko

Volodymyr Vynnychenko Central Ukrainian State University, Kropyvnytskyi, Ukraine

The article substantiates the significance of a systematic approach to teaching the topic "Equations and Inequalities with Parameters." A methodology for constructing sets of exercises aimed at developing students' analytical thinking and skills in exploring relationships between variables is presented. The structure of the exercise sets is revealed, combining orientational, basic, analytical, and generalizing tasks, along with examples of practice-oriented and creative exercises.

Keywords: sets of exercises, parameter, equation, inequality, analytical thinking, teaching methodology.

Постановка проблеми. Одним із найскладніших і водночас найважливіших розділів шкільного курсу алгебри є розв'язування рівнянь та нерівностей з параметрами. Цей матеріал не лише формує в учнів глибші уявлення про поняття функції та змінної, а й розвиває аналітичне мислення, здатність узагальнювати й моделювати математичні залежності. Водночас практика навчання засвідчує, що більшість учнів зазнають труднощів у роботі з параметрами через відсутність системного підходу до вивчення теми.

Проблема ускладнюється тим, що навчальні матеріали здебільшого зосереджуються на окремих видах рівнянь і нерівностей без належного відпрацювання логіки дослідження залежності від параметра. У результаті учні опановують окремі алгоритми, але не здатні свідомо аналізувати задачу. Ефективним інструментом розв'язання цієї методичної проблеми є впровадження циклів вправ – структурованих послідовностей завдань, що забезпечують поетапне формування навичок.

Аналіз досліджень і публікацій. Проблема побудови системи вправ у навчанні математики досліджувалася багатьма українськими та зарубіжними науковцями. Зокрема, питання теоретичних засад структурування навчального матеріалу висвітлювали А. Гільберт, Г. Поля, П. Гейден, а в українській педагогіці – О. Мартинюк [1], Н. Тарасенкова [2], Л. Коваль [3], Т. Науменко [4]. Вони наголошують, що вправи мають не лише тренувальну, а й розвивальну функцію, забезпечуючи формування логічного, алгоритмічного та творчого мислення.

Засади побудови циклів вправ як дидактичної системи розглядалися у працях М. Бурди та Н. Тарасенкової [5], Л. Козак [6], Т. Яценко [7], які визначають цикл вправ як упорядковану сукупність завдань, об'єднаних спільною метою, поступовим нарощуванням складності й переходом від репродуктивної до творчої діяльності.

Особливості навчання рівнянь та нерівностей з параметрами висвітлювали Л. Коваль [3], М. Бурди та Н. Тарасенкової [5], С. Скворцова [8], Т. Годованюк, Т. Махомета [9], які підкреслюють важливість поєднання алгебраїчного, графічного та дослідницького підходів. Педагогічний досвід свідчить, що учні, які працюють із системами вправ, що мають чітку структуру, краще розуміють сутність параметра, закономірності зміни кількості розв'язків і логіку побудови математичних доведень.

Метою статті є обґрунтування та опис системи циклів вправ, призначених для формування в учнів умінь розв'язувати рівняння та нерівності з

параметрами, а також розкриття методичних підходів до їх побудови й застосування в шкільній практиці.

Виклад основного матеріалу (результатів) дослідження. Цикл вправ – це логічно впорядкована послідовність навчальних завдань, у якій кожна вправа виконує певну дидактичну функцію: від актуалізації знань до узагальнення й творчого застосування. В основі побудови циклу лежать принципи науковості, послідовності, диференціації, зв'язку теорії з практикою.

Основними вимогами до побудови циклів є:

- ✓ поступове нарощування складності завдань (від елементарних прикладів до дослідницьких задач);
- ✓ забезпечення інтеграції методів (аналітичного, графічного, комбінованого);
- ✓ включення творчих і проблемних ситуацій, що вимагають дослідження умов існування розв'язків;
- ✓ використання рефлексії для усвідомлення помилок і узагальнення досвіду.

У сучасній методиці навчання математики дедалі більшого значення набуває системний підхід до організації навчальної діяльності учнів. Одним з ефективних інструментів цього підходу є побудова циклів вправ, які дозволяють не лише відпрацювати певні прийоми розв'язування, а й забезпечити розвиток мислення, формування навичок узагальнення та перенесення знань у нові ситуації.

Тема «Рівняння та нерівності з параметрами» є особливо чутливою до методично виваженої побудови циклів вправ. Адже для учнів ця тема складна: вони часто зупиняються на формальному виконанні дій, втрачаючи розуміння ролі параметра, не вміють поєднувати алгебраїчні та графічні методи, не бачать міжпредметних зв'язків.

У працях М. Бурди, Г. Бевза, Н. Тарасенкової цикл вправ розглядається як цілісна послідовність завдань, об'єднаних спільною дидактичною метою та внутрішньою логікою розвитку. Основні характеристики циклу вправ є такими:

- ✓ послідовність (завдання розташовані від простого до складного);
- ✓ варіативність (передбачає різні методи та шляхи розв’язання);
- ✓ нарощування складності (перехід від базових алгоритмів до проблемних і дослідницьких завдань);
- ✓ міжпредметні зв’язки (застосування знань у контексті фізики, інформатики, економіки тощо).

Послідовність у побудові циклу вправ означає логічне розташування завдань відповідно до розвитку пізнавальної діяльності учнів. Цей процес передбачає такі етапи:

1. Орієнтаційний – завдання на відтворення знань (що таке параметр, приклади рівнянь з параметрами).

2. Формувальний – вправи на застосування алгоритмів (розв’язування квадратних рівнянь залежно від параметра).

3. Аналітичний – вправи на порівняння результатів, узагальнення (розв’язування завдань кількома методами).

4. Дослідницький – проблемні та творчі завдання (самостійне складання рівнянь з параметрами).

Розв’язування рівнянь і нерівностей з параметрами є одним із найскладніших видів навчальної діяльності у шкільному курсі алгебри. Учні часто зазнають труднощів через:

- ✓ необхідність поєднувати аналітичні та графічні методи;
- ✓ роботу з кількома випадками значень параметра;
- ✓ відсутність сформованих узагальнених прийомів дослідження.

При укладанні циклів вправ спиралися на рекомендації чинних навчальних програм МОН України.

Цикл вправ з теми «Рівняння та нерівності з параметрами» було структуровано у кілька етапів:

1. Актуалізація та підготовчі вправи
   - ✓ завдання на відтворення знань про ОДЗ, модуль, властивості квадратного рівняння;

- ✓ приклади з найпростішими параметрами.

2. Базові вправи
   - ✓ лінійні та квадратні рівняння з параметрами у коефіцієнтах;
   - ✓ задачі на визначення кількості розв'язків.
3. Аналітичні вправи
   - ✓ дослідження залежності кількості розв'язків від значень параметра;
   - ✓ комбінування аналітичного й графічного підходів.
4. Узагальнювальні вправи
   - ✓ системи рівнянь і нерівностей з параметрами;
   - ✓ завдання, що вимагають дослідження функцій із параметрами.
   - ✓ Практико-орієнтовані вправи
   - ✓ прикладні задачі з фізики та економіки;
   - ✓ створення власних завдань із параметрами.

Розглянемо приклади розроблених завдань, які утворюють цикли вправ.

Актуалізація знань.

1. Для яких значень параметра a рівняння $\sqrt{x-a}=3$ має розв'язки?
2. Знайдіть кількість розв'язків рівняння $x^2-ax=0$ залежно від a.
3. Визначте значення параметра a, при яких графік функції $y=x^2-a$ перетинає вісь абсцис.
4. Для яких значень a рівняння $|x|=a$ має: а) один розв'язок; б) два розв'язки; в) жодного розв'язку?
5. Дослідіть, при яких a рівняння $\frac{1}{x-a}=2$ має розв'язки.

Базові вправи.

6. Розв'яжіть рівняння $|x-a|=2$ аналітично і графічно.
7. Для яких значень параметра a рівняння $x^2-2ax+a^2-1=0$ має два різних корені?
8. Знайдіть умови на параметр a за яких рівняння $ax^2+(a-1)x+1=0$ має хоча б один розв'язок.

9. Для яких значень параметра a рівняння $(a-2)x = a+1$ має розв'язок?

10. Дослідіть залежність кількості коренів від значення a у рівнянні $(x-1)(x-a) = 0$.

11. Для яких a рівняння $x^2 + (a-3)x + a = 0$ має рівні корені?

12. Визначте значення a, при яких рівняння $|x| = |x-a|$ має безліч розв'язків.

Аналітичні вправи.

13. Дослідіть залежність кількості розв'язків рівняння $x^2 = a$ від значення параметра a.

14. Для яких значень параметра a рівняння $|x-2| = a$ має два розв'язки?

15. Знайдіть значення a, для яких рівняння $\sqrt{x+a} = x$ має розв'язки.

16. Для яких a рівняння $(a^2-4)x^2 + 2ax + 1 = 0$ має розв'язки?

17. Дослідіть кількість розв'язків рівняння $sinx = a$.

18. Для яких a рівняння $cosx = a$ має розв'язки?

19. Знайдіть значення a, при яких рівняння $|x^2 - a| = 1$ має: а) жодного розв'язку; б) два; в) чотири розв'язки.

20. Для яких значень параметра a рівняння $\frac{x^2}{a} = 1$ має два різних розв'язки?

Узагальнювальні вправи.

21. Розв'яжіть систему:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = a^2 \\ x + y = 2a \end{cases}$$

22. Для яких a нерівність $\frac{x-a}{x+1} > 0$ виконується для всіх $x > 0$?

23. Дослідіть кількість розв'язків системи рівнянь залежно від параметра a:

$$\begin{cases} x^2 + y = a \\ y^2 + x = a \end{cases}$$

24. Для яких a нерівність $(x-a)(x+2) \leq 0$ має розв'язки?

25. Дослідіть рівняння з параметром: $x^2 - 2ax + a^2 - 9 = 0$.

26. Визначте значення a, при яких нерівність $|x - a| < 3$ має розв'язки.

27. Для яких значень параметра a рівняння $tgx = a$ має безліч розв'язків?

28. Побудуйте графік функції $y = |x - a| + |x + a|$ і дослідіть її властивості.

Практико-орієнтовані вправи.

29. Траєкторія руху тіла описується рівнянням $s(t) = at^2 + bt$. Для яких значень параметра a рух є рівноприскореним?

30. Функція прибутку підприємства має вигляд $P(x) = ax - b$. Знайдіть умови на a, b, щоб підприємство було беззбитковим.

31. Виробництво описується рівнянням $Q(x) = ax^2 + bx + c$. Для яких значень параметра a обсяг продукції зростає необмежено?

32. Знайдіть значення параметра a, при яких рівняння $e^x = a$ має розв'язки.

33. Для моделі росту населення $N(t) = N_0 e^{at}$ визначте, при яких a населення зростає, зменшується чи залишається сталим.

34. Опір кола визначається формулою $R = \frac{U}{I}$. Якщо $U = a$, а $I = x$, складіть і дослідіть рівняння для визначення струму при різних значеннях a.

35. Для функції попиту $D(x) = a - bx$ знайдіть значення параметра a, при яких попит не є від'ємним.

36. У фізичній моделі охолодження описано рівнянням $T(t) = T_0 + (a - T_0)e^{-kt}$. Дослідіть поведінку розв'язків при зміні параметра a.

Творчо-дослідницькі завдання.

37. Складіть власне рівняння з параметром, яке має не більше двох розв'язків, і обґрунтуйте вибір.

38. Побудуйте систему нерівностей із параметром, яка описує область на площині, і дослідіть зміну цієї області при зміні параметра.

39. Дослідіть, чи існують значення параметра a, при яких рівняння $sin(ax) = x$ має розв'язки.

40. Складіть приклад прикладної задачі з економіки, розв’язання якої зводиться до рівняння з параметром.

Висновки та перспективи подальших пошуків у напрямі дослідження. Проведене дослідження приводить нас до таких висновків:

1. Розв’язування рівнянь та нерівностей з параметрами є ключовим елементом розвитку аналітичного мислення учнів.

2. Цикли вправ забезпечують системність навчання, узгодженість методів і поступове ускладнення матеріалу.

3. Ефективна система вправ має поєднувати різні рівні діяльності – від відтворення до творчості.

4. Розроблена структура циклів може бути застосована у шкільній практиці, педагогічній практиці студентів та курсах підвищення кваліфікації вчителів математики.

Список використаної літератури:

1. Мартинюк О.В. Система вправ як засіб формування математичної компетентності учнів. *Математика в школі*. 2014. № 3. С. 10–16.
2. Тарасенкова Н.А. Формування математичної компетентності школярів: теорія і практика. Черкаси : Вид. ЧНУ, 2006. 312 с.
3. Коваль Л.В. Формування методичної компетентності майбутніх учителів математики у процесі навчання розв’язування задач. Тернопіль: ТНПУ, 2020. 312 с.
4. Науменко Т.О. Розвиток дослідницьких умінь у процесі навчання математики. // *Математика в школі.* 2018. №5. С. 12–17.
5. Бурда М.І., Тарасенкова Н.А. Методика навчання математики у старшій школі. Київ : Знання, 2010. 384 с.
6. Козак Л.В. Класифікація завдань у навчанні математики: сучасний підхід // Педагогіка і психологія. 2018. № 1. С. 33–39.
7. Яценко Т.О. Розв’язування рівнянь і нерівностей з параметрами: методичні підходи // Математика в школах України. 2019. № 15. С. 12–19.
8. Скворцова С.О. Методика навчання математики у вищій школі. Одеса: ПНПУ, 2018. 310 с.
9. Годованюк Т.Л., Махомета Т.М. Методична підготовка майбутніх учителів математики: теорія і практика: монографія. Умань: ПП Жовтий О. О., 2019. 316 с.

Відомості про автора:

Чалий Сергій Олексійович – студент ІІ курсу магістратури факультету інформаційних технологій, математики та природничих наук Центральноукраїнського державного університету імені Володимира Винниченка, тел.+380957118691, e-mail: sergei.chaliy.ua@gmail.com.