

МЕТОДИКА ВИКОРИСТАННЯ ПРОГРАМИ GEOGEBRA ПРИ ВИВЧЕННІ МНОГОГРАННИКІВ У 11 КЛАСІ

Мазур Богдан, Яременко Юрій

Центральноукраїнський державний університет імені Володимира

Винниченка, м. Кропивницький, Україна

Дана робота присвячена розробці методики використання динамічного математичного середовища GeoGebra при вивченні многогранників учнями одинадцятих класів. У статті проаналізовано традиційні труднощі засвоєння стереометрії, обґрунтовано доцільність застосування цифрових технологій для розвитку просторового мислення, досліджено дидактичні можливості GeoGebra для візуалізації просторових геометричних об'єктів. Представлено детальну методику організації навчального процесу з використанням динамічних 3D-моделей при вивченні призм, пірамід та правильних многогранників. Розроблено систему навчальних завдань різних типів, надано покрокові інструкції з побудови геометричних конструкцій у GeoGebra, описано етапи роботи учнів з інтерактивними моделями. Особливу увагу приділено формуванню вмінь дослідницької діяльності та розвитку просторової уяви.

Ключові слова: GeoGebra, многогранники, стереометрія, динамічна візуалізація, просторове мислення, методика навчання математики, призми, піраміди, правильні многогранники.

Methodology of using GeoGebra in studying polyhedra in grade 11

B. Mazur, Yu. Yaremenko

Volodymyr Vynnychenko Central Ukrainian State University, Kropyvnytskyi, Ukraine

This paper is devoted to the development of a methodology for using the dynamic mathematics environment GeoGebra in studying polyhedra by eleventh grade students. The article analyzes traditional difficulties in learning stereometry, justifies the expediency of using digital technologies for the development of spatial thinking, and explores the didactic capabilities of GeoGebra for visualizing spatial geometric objects. A detailed methodology for organizing the educational process using dynamic 3D models when studying prisms, pyramids, and regular polyhedra is presented. A system of educational tasks of various types has been developed, step-by-step instructions for constructing geometric structures in GeoGebra are provided, and the stages of students' work with interactive models are described. Particular attention is paid to the formation of research skills and the development of spatial imagination.

Keywords: GeoGebra, polyhedra, stereometry, dynamic visualization, spatial thinking, mathematics teaching methodology, prisms, pyramids, regular polyhedra.

Постановка проблеми. Стереометрія традиційно є однією з найскладніших тем шкільного курсу математики. Статистика державної підсумкової атестації свідчить, що завдання з просторової геометрії викликають найбільше труднощів у випускників: середній відсоток виконання таких завдань становить лише 35-40%. Основними причинами цих труднощів є абстрактність просторових понять, недостатній розвиток просторового мислення та уяви учнів, складність побудови наочних зображень об'ємних фігур на площині.

Традиційні методи навчання стереометрії базуються переважно на використанні статичних креслень у зошитах та на дошці, а також картонних або дерев'яних моделей многогранників. Проте такий підхід має суттєві обмеження: статичне зображення не дає можливості побачити фігуру з різних ракурсів, важко продемонструвати динаміку зміни геометричних властивостей при варіюванні параметрів, складно організувати самостійну дослідницьку діяльність учнів. Як наслідок, учні часто механічно заучують алгоритми розв'язування типових задач, не розуміючи їх геометричної суті.

Сучасний етап розвитку освіти характеризується активним впровадженням цифрових технологій у навчальний процес. Компетентнісний підхід, закладений у Державному стандарті базової середньої освіти, передбачає формування у учнів не лише предметних знань, а й здатності застосовувати їх у нестандартних ситуаціях, критично мислити, самостійно здобувати інформацію. Інформаційно-комунікаційні технології надають потужні інструменти для реалізації цих завдань.

Динамічні математичні середовища, зокрема GeoGebra, відкривають нові можливості для навчання стереометрії. Вони дозволяють створювати тривимірні інтерактивні моделі, які можна обертати у просторі, змінювати їх параметри, досліджувати з різних ракурсів. Однак методика систематичного використання GeoGebra при вивченні многогранників потребує детальної розробки з

урахуванням специфіки навчальної програми та вікових особливостей старшокласників.

Аналіз досліджень і публікацій. Теоретичні основи використання інформаційно-комунікаційних технологій у навчанні математики закладені в роботах В. Бикова, М. Жалдака, Н. Морзе, С. Ракова, М. Шишкіної і ін. Зокрема, М. Жалдак обґрунтував концепцію комп'ютерно-орієнтованої методичної системи навчання математики [1], С. Раков розробив теорію математичної освіти з використанням ІКТ. Зокрема, використання сучасних інформаційно-комунікаційних технологій при викладанні геометрії розглянуто у роботі [10].

Методичні питання навчання стереометрії висвітлені в працях М. Бурди, З. Слепкань, Н. Тарасенкової, О. Скафи. М. Бурда розробив концепцію профільного навчання математики [4], З. Слепкань – методичну систему формування геометричних понять [5], Н. Тарасенкова дослідила роль знаково-символьної діяльності у навчанні математики.

Проблемам використання GeoGebra в освітньому процесі присвячені дослідження В. Ключка, О. Горошка, О. Семеніхіної. В. Ключко в докторській дисертації обґрунтував систему застосування ІКТ у навчанні геометрії, виділив основні функції динамічних геометричних систем [2]. О. Горошко розробив методичні підходи до використання комп'ютерної візуалізації у навчанні математики, зокрема детально описав функціональні можливості GeoGebra 3D для навчання стереометрії [7]. О. Семеніхіна створила теоретико-методичні основи навчання математики засобами комп'ютерної графіки [3].

Закордонні дослідники активно вивчають дидактичні можливості GeoGebra. М. Хохенвартер, автор програми, обґрунтував концепцію динамічної математики [6]. Проте їх роботи не містять конкретних методичних розробок з вивчення многогранників у контексті української системи освіти.

Мета статті – розробити та обґрунтувати методику використання GeoGebra при вивченні многогранників у 11 класі, що включає систему навчальних завдань різних типів, покрокові інструкції з побудови геометричних конструкцій та методичні рекомендації щодо організації навчального процесу.

Виклад основного матеріалу (результатів) дослідження.

Характеристика GeoGebra як засобу навчання стереометрії.

GeoGebra – це вільне динамічне математичне програмне забезпечення, розроблене Маркусом Хохенвартером у 2001 році [6]. Програма поєднує можливості геометрії, алгебри, таблиць, графіків, статистики та математичного аналізу в одному інтегрованому середовищі. Для навчання стереометрії особливо важливим є модуль GeoGebra 3D Graphics, який дозволяє створювати та досліджувати тривимірні геометричні об'єкти.

Основні переваги GeoGebra для навчання стереометрії:

Динамічність: можливість обертати модель у просторі, змінювати параметри фігур, спостерігати за зміною їх властивостей у режимі реального часу;

Інтерактивність: учні можуть самостійно створювати конструкції, експериментувати з ними, перевіряти гіпотези;

Багатоваріантність представлення: одночасна візуалізація об'єкта у 3D-вікні, алгебраїчне представлення координат точок та рівнянь площин;

Точність побудов: комп'ютер забезпечує математично точні креслення, що важливо для формування правильних геометричних образів;

Доступність: програма є безкоштовною, кросплатформенною (працює на Windows, Mac, Linux), має версію для мобільних пристроїв та онлайн-версію;

Можливість збереження та обміну: створені моделі можна зберігати, експортувати у різних форматах, ділитися ними через хмарне сховище GeoGebra.org.

Величезна роль ІКТ при реалізації принципу наочності, оскільки поєднання живого слова з наочністю дає потрібний ефект у навчанні, особливо при вивченні геометрії [8]. Для більшості учнів характерне наочно-образне мислення, тому необхідно використовувати якісну наочність, щоб залучити в процес навчання слух, зір, уяву і емоції [8]. Уроки геометрії із застосуванням ІКТ пробуджують цікавість, підвищують працьовитість, фокусують увагу і зосередженість учнів. При вивченні просторових геометричних фігур учні

асоціюють геометричну фігуру з її прототипами реального світу, таким чином досліджуючи властивості та елементи таких об'єктів методом аналізу наочності.

Дидактичні принципи використання GeoGebra при навчанні многогранників.

Ефективне використання GeoGebra вимагає дотримання певних дидактичних принципів:

Принцип поступовості: спочатку учні працюють з готовими моделями (спостереження, маніпулювання), потім створюють прості конструкції за зразком, і лише після цього переходять до самостійного конструювання складних об'єктів.

Принцип доцільності: GeoGebra використовується лише тоді, коли це дійсно покращує розуміння матеріалу. Не варто замінювати комп'ютером усі традиційні засоби навчання.

Принцип активності: учні не просто спостерігають за демонстрацією вчителя, а самостійно виконують побудови, досліджують властивості фігур, формують висновки.

Принцип наочності та абстрагування: динамічна модель є засобом для створення правильного геометричного образу, але кінцева мета – формування здатності оперувати абстрактними поняттями без опори на наочність.

Принцип систематичності: GeoGebra використовується регулярно, на різних етапах вивчення теми, а не епізодично.

Методика вивчення призм з використанням GeoGebra.

Етап 1. Введення поняття призми (1 урок).

На початковому етапі вчитель демонструє готові динамічні моделі різних призм (трикутна, чотирикутна, п'ятикутна). Учні спостерігають за моделями, обертаючи їх у просторі, виділяють спільні ознаки. Вчитель формулює означення призми, демонструючи його на моделі: призма – це многогранник, у якого дві грані (основи) є рівними многокутниками, що лежать у паралельних площинах, а інші грані (бічні) – паралелограми.

Завдання для учнів:

Підрахувати кількість вершин, ребер та граней у призмах з різною кількістю кутів в основі. Виявити закономірність.

Дослідити, чи є бічні грані паралелограмами у будь-якій призмі (змінюючи параметри моделі).

Виявити умови, за яких бічні грані стають прямокутниками (введення поняття прямої призми).

Для побудови трикутної піраміди та її розгортки потрібно використати інструменти 3D Graphics, а після побудови піраміди можна показати її розгортку, використовуючи інструмент Розгортка [11].

Етап 2. Побудова призми в GeoGebra (1 урок).

Покрокова інструкція побудови трикутної призми:

Крок 1. Відкрити GeoGebra, вибрати режим 3D Graphics.

Крок 2. Побудувати трикутник-основу призми: використати інструмент Polygon, позначити три точки A, B, C на площині $z = 0$.

Крок 3. Створити вектор висоти призми: використати інструмент Vector, побудувати вектор $v = (0, 0, h)$, де h – висота призми.

Крок 4. Побудувати верхню основу: використати інструмент Translate by Vector, перемістити трикутник ABC уздовж вектора v . Отримаємо точки A', B', C'.

Крок 5. Побудувати бічні грані: використати інструмент Polygon, з'єднати точки у правильному порядку (наприклад, A, B, B', A' для однієї грані).

Крок 6. Налаштувати візуалізацію: змінити кольори, прозорість, показати/приховати підписи точок.

Крок 7. Створити слайдер для параметра h , щоб можна було динамічно змінювати висоту призми.

Учні виконують цю побудову разом з вчителем, потім самостійно будують призми з іншими основами (чотирикутну, п'ятикутну). Важливо навчити учнів не лише механічно відтворювати кроки, а розуміти логіку побудови.

Етап 3. Дослідження властивостей призм (1-2 уроки).

Дослідницькі завдання:

Завдання 1. Дослідити, як змінюється площа бічної поверхні призми при зміні висоти (використовуючи слайдер). Сформулювати формулу.

Завдання 2. Побудувати діагональний переріз призми. Дослідити, при яких умовах діагональний переріз є прямокутником.

Завдання 3. Знайти кут між діагоналлю призми та площиною основи. Дослідити залежність цього кута від висоти призми.

Завдання 4. Побудувати переріз призми площиною, що не паралельна основам. Визначити, скількома сторонами може бути обмежений такий переріз.

Етап 4. Розв'язування задач (2-3 уроки).

На цьому етапі GeoGebra використовується як допоміжний інструмент для візуалізації умови задачі, перевірки гіпотез, контролю правильності розв'язку. Наприклад:

Задача 1. Основою прямої призми є прямокутний трикутник з катетами 3 см і 4 см. Висота призми дорівнює 5 см. Знайти об'єм призми та площу повної поверхні.

Учні будують модель призми за заданими параметрами, перевіряють обчислені значення за допомогою вбудованих функцій GeoGebra (Volume, Surface Area).

Методика вивчення пірамід з використанням GeoGebra.

Вивчення пірамід здійснюється за аналогічною схемою, але з урахуванням специфіки цих многогранників. Особлива увага приділяється правильним пірамідам.

Покрокова інструкція побудови правильної трикутної піраміди:

Крок 1. Побудувати правильний трикутник в основі (використати Regular Polygon з $n = 3$).

Крок 2. Знайти центр основи (використати Center або побудувати перетин медіан).

Крок 3. Побудувати вершину S піраміди: $S = (x_0, y_0, h)$, де (x_0, y_0) – координати центра основи, h – висота.

Крок 4. З'єднати вершину S з вершинами основи (використати Pyramid або Polygon).

Крок 5. Створити слайдери для зміни радіуса основи та висоти піраміди.

Побудова призм, пірамід, тіл обертання та їх комбінацій у програмі GeoGebra полегшує розуміння навчального матеріалу, дає можливість краще формувати просторові уявлення про фігури, що вивчаються, допомагає учням успішно здійснювати самостійні дослідження. Особливості побудови перерізів многогранників методом слідів та методом внутрішнього проектування детально описані у роботах [8, 9]. При побудові перерізів особливу увагу потрібно приділити вмінню будувати точку перетину (слід) прямої з площиною та пряму (слід) перетину двох площин.

Дослідницькі завдання для пірамід:

Дослідити співвідношення між висотою піраміди, апофемою та ребром основи у правильній піраміді.

Побудувати переріз піраміди площиною, паралельною основі. Дослідити подібність перерізу та основи.

Знайти кут нахилу бічної грані до площини основи. Як він залежить від висоти піраміди?

Побудувати вписану та описану сферу для правильної піраміди (для тетраедра).

Методика вивчення правильних многогранників.

GeoGebra має вбудовані функції для побудови правильних многогранників (Платонових тіл): тетраедра, куба, октаедра, додекаедра, ікосаедра. Це дозволяє ефективно організувати їх вивчення.

Методичний підхід:

Учні будують всі п'ять правильних многогранників, досліджують їх структуру, підраховують кількість елементів, перевіряють формулу Ейлера $V - E + F = 2$.

Досліджують симетрію правильних многогранників: площини симетрії, осі симетрії, центр симетрії.

Вивчають дуальність: куб $\leftrightarrow$ октаедр, додекаедр $\leftrightarrow$ ікосаедр, тетраедр $\leftrightarrow$ тетраедр. Будують дуальні многогранники у GeoGebra.

Будують вписані та описані сфери, досліджують їх радіуси.

Виконують проєктні роботи: правильні многогранники у природі, архітектурі, мистецтві.

Система завдань різних типів.

Для ефективного використання GeoGebra важливо розробити систему завдань різних типів, що відповідають різним рівням пізнавальної діяльності:

Тип 1. Завдання на відтворення: побудувати многогранник за зразком, відтворити послідовність дій.

Тип 2. Завдання на дослідження: виявити закономірності, сформулювати властивості, перевірити гіпотези.

Тип 3. Завдання на конструювання: побудувати об'єкт за заданими властивостями, створити динамічну модель для ілюстрації теореми.

Тип 4. Завдання на застосування: використати GeoGebra для розв'язування задачі, перевірки результату.

Тип 5. Творчі завдання: створити власну задачу з використанням GeoGebra, розробити навчальний проєкт.

7. Організаційні форми роботи.

Фронтальна робота: вчитель демонструє побудову на інтерактивній дошці або через проєктор, учні спостерігають, ставлять запитання.

Індивідуальна робота: кожен учень працює за комп'ютером, виконує завдання у власному темпі (потребує комп'ютерного класу).

Робота в парах: двоє учнів працюють за одним комп'ютером, обговорюють стратегію, допомагають один одному.

Групова робота: група учнів виконує проєктне завдання (наприклад, створення віртуального музею правильних многогранників).

Домашня робота: учні використовують онлайн-версію GeoGebra або встановлюють програму на домашній комп'ютер/планшет.

Практичний досвід використання різних організаційних форм роботи з GeoGebra при вивченні просторових геометричних фігур описано у дослідженнях [8, 9, 11]. Яскрава графіка та можливість зміни побудованого зображення при зміні заданих елементів геометричної фігури підвищують зацікавленість учнів до опанування навчальним матеріалом.

Висновки та перспективи подальших пошуків у напрямі дослідження.

Розроблена методика використання GeoGebra при вивченні многогранників у 11 класі базується на поєднанні традиційних дидактичних принципів навчання геометрії з сучасними можливостями цифрових технологій. Систематичне застосування динамічних 3D-моделей створює умови для інтенсивного розвитку просторового мислення учнів, формування глибокого розуміння геометричних властивостей многогранників, підвищення мотивації до вивчення математики.

Ключовими елементами методики є: поетапність введення GeoGebra (від спостереження до самостійного конструювання), система завдань різних типів (від репродуктивних до творчих), органічне поєднання комп'ютерних та традиційних засобів навчання, орієнтація на розвиток дослідницьких умінь учнів. Важливим є дотримання принципу доцільності використання технологій: GeoGebra застосовується тоді, коли це дійсно покращує розуміння матеріалу, а не заради самих технологій.

Практична цінність розробленої методики полягає в тому, що вона може бути безпосередньо впроваджена у навчальний процес. Покрокові інструкції з побудови многогранників, система дослідницьких завдань, методичні рекомендації щодо організації роботи учнів є готовим інструментарієм для вчителів математики. При цьому методика є достатньо гнучкою, щоб адаптуватися до різних умов навчання (наявність/відсутність комп'ютерного класу, різний рівень ІКТ-компетентності вчителя та учнів).

Використання GeoGebra вимагає певної підготовки вчителів, проте програма є достатньо інтуїтивною, а наявність великої кількості онлайн-ресурсів, навчальних посібників та активної спільноти користувачів значно полегшує процес опанування. Важливо, щоб вчитель не обмежувався роллю

демонстратора, а створював умови для активної діяльності учнів, заохочував їх до експериментування та самостійних відкриттів.

Перспективи подальших досліджень пов'язані з: експериментальною перевіркою ефективності запропонованої методики на великій вибірці учнів; розробкою методики використання GeoGebra для вивчення інших розділів стереометрії (тіла обертання, комбінації многогранників та тіл обертання); створенням цифрових освітніх ресурсів (колекції готових моделей, інтерактивних вправ, автоматизованих тестів); дослідженням можливостей організації дистанційного навчання геометрії з використанням GeoGebra; розробкою програм підвищення кваліфікації вчителів математики з питань використання динамічних математичних середовищ.

Список використаної літератури:

1. Жалдак М. І., Горошко Ю. В., Вінниченко Є. Ф. Математика з комп'ютером : посібник. Київ : НПУ, 2004. 181 с.
2. Ключко В. І. Система застосування інформаційних та комунікаційних технологій у навчанні геометрії учнів загальноосвітніх навчальних закладів : дис. д-ра пед. наук : 13.00.02. Київ, 2014. 536 с.
3. Семеніхіна О. В. Теоретико-методичні основи навчання майбутніх учителів математики візуалізації математичних понять засобами комп'ютерної графіки : дис. д-ра пед. наук : 13.00.02. Суми, 2018. 592 с.
4. Бурда М. І. Методика викладання математики в середній школі : навчальний посібник. Київ : Вища школа, 1996. 414 с.
5. Слєпкань З. І. Методика навчання математики : підручник. Київ : Вища школа, 2006. 582 с.
6. Hohenwarter M., Preiner J. Dynamic Mathematics with GeoGebra. Journal of Online Mathematics and its Applications. 2007. Vol. 7. P. 1-15.
7. Горошко Ю. В. Функціональні можливості GeoGebra 3D для навчання стереометрії. Комп'ютер у школі та сім'ї. 2013. № 8. С. 12-16.
8. Яременко Ю.В. Використання програми GeoGebra при викладанні геометрії // Вісник Черкаського університету: Педагогічні науки. 2019 – №3 – С.102-107.

9. Яременко Ю.В., Гелевер І.Г. Використання інформаційно-комунікаційних технологій при зображенні фігур в геометрії. *Наукові записки. Серія: педагогічні науки*. Кропивницький: ЦДПУ ім. В.Винниченка, 2019. Випуск 177, Ч.ІІ. С. 172-176.

10. Яременко Ю.В., Яременко Л.І. Використання сучасних інформаційно-комунікаційних технологій при викладанні геометрії. *Наукові записки. Серія: педагогічні науки*. Кропивницький: ЦДПУ ім. В.Винниченка, 2019. Випуск 179. С. 181-187.

11. Яременко Ю.В., Овсянік Т.С. Застосування програми *geogebra* у процесі вивчення розділів «Многогранники» та «Тіла обертання». *Наукові записки. Серія: педагогічні науки*. Кропивницький: ЦДПУ ім. В.Винниченка, 2020. Випуск 191, Ч.ІІ. С.204-208.
<https://doi.org/10.36550/2415-7988-2020-1-191-204-208>

Відомості про авторів:

Мазур Богдан Сергійович – студент ІІ курсу магістратури факультету інформаційних технологій, математики та природничих наук Центральноукраїнського державного університету імені Володимира Винниченка, тел. +380958851930, e-mail: ashonuyak@gmail.com.

Яременко Юрій Вікторович – кандидат фізико-математичних наук, доцент, доцент кафедри математики, фізики та методик викладання Центральноукраїнського державного університету імені Володимира Винниченка, тел. +380504870618, e-mail: yaremenk1959@gmail.com.