УДК 519

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ СТРАХОВИХ РИЗИКІВ: ОЦІНКА ЙМОВІРНОСТІ БАНКРУТСТВА

Сотник Катерина

Науковий керівник: канд. ф.-м. наук, доцент, доцент Халецька З.П.

Центральноукраїнський державний університет імені Володимира Винниченка, м. Кропивницький, Україна

Анотація. *Стаття присвячена математичному моделюванню страхових ризиків для оцінки ймовірності банкрутства страхової компанії. Розглянуто індивідуальні та колективні моделі ризиків, які використовуються для прогнозування сумарних позовів і визначення мінімального резервного капіталу. Основна увага зосереджена на застосуванні ймовірнісних підходів, включаючи біноміальний і пуассонівський розподіли, а також центральну граничну теорему. Практичні приклади ілюструють вплив резервного капіталу на ймовірність банкрутства.*

Ключові слова: *актуарна математика, страхові ризики, сумарний позов, ймовірність банкрутства, моделі індивідуального ризику, моделі колективного ризику.*

MATHEMATICAL MODELING OF INSURANCE RISKS: ASSESSMENT OF THE PROBABILITY OF BANKRUPTCY

K. Sotnyk

Scientific supervisor: Candidate of Physics and Mathematics Sciences, Docent Khaletska Z.P.

Volodymyr Vynnychenko Central Ukrainian State University, Kropyvnytsky, Ukraine

Annotation. *The article is devoted to the mathematical modeling of insurance risks to assess the probability of an insurance company's bankruptcy. Individual and collective risk models used to predict total claims and determine the minimum reserve capital are considered. The main focus is on the application of probabilistic approaches, including the binomial and Poisson distributions, as well as the central limit theorem. Practical examples illustrate the impact of reserve capital on the probability of bankruptcy.*

Key words: *actuarial mathematics, insurance risks, summary claim, probability of bankruptcy, individual risk models, collective risk models,*

Постановка проблеми. У сучасному страхуванні ключову роль відіграють математичні моделі для управління фінансовими ризиками. Вони дозволяють оцінити імовірність банкрутства страхової компанії, спрогнозувати збитки та визначити адекватні резерви. Такі задачі вирішуються в межах актуарної математики із застосуванням теорії ймовірностей, математичної статистики та теорії випадкових процесів.

Актуальність роботи. Вивчення ймовірнісних методів та дослідження моделей позовів, моделей індивідуальних та колективних ризиків, є основою для моделювання страхової діяльності та оптимізації роботи страхових портфелів.

Мета статті: Аналіз ймовірнісних моделей страхових ризиків та практична ілюстрація їх застосування.

Виклад основного матеріалу.

1. Дискретні моделі індивідуальних позовів

Індивідуальний позов клієнта до страхової компанії — це сума, необхідна для відшкодування втрат, спричинених страховим випадком. Математично він описується випадковою величиною X, яка може набувати нульового значення з додатною ймовірністю $P\{X=0\}=p_0>0$. Якщо X набуває скінченного або зліченного числа значень, вона є дискретною.

Розподіл X задається функцією:

$$P_X(b_i)=P\{X=b_i\}, b_i \in B,$$

де B — множина можливих значень. Ймовірності можна подати таблицею:

$\boldsymbol{b_i}$	b_0	b_1	...	b_n
$\boldsymbol{p_i}$	p_0	p_1	...	p_n

Числові характеристики. За розподілом випадкової величини індивідуального позову X однозначно визначаються його ймовірнісні характеристики: математичне сподівання, дисперсія, середнє квадратичне відхилення, моменти різних порядків, зокрема:

- *Математичне сподівання:* $MX=\sum_{i=0}^{\infty} b_i P_X(b_i)$

- *Дисперсія:* $DX = MX^2 - (MX)^2 = \sum_{i=0}^{\infty} b_i^2 p_i - (b_i p_i)^2$ [1; 2; 6].

Структурування моделі: $X = IY$

Випадкову величину X (у випадку, коли договір породжує один позов) зручно подавати як: $X = IY$, де I — індикатор події («відбувся страховий випадок»), Y — величина реально поданого позову ($I=1$). Випадкові величини I та Y – незалежні і розподіл Y збігається з умовним розподілом X за умови $\{X > 0\}$, тобто

$$P\{Y = b_i\} = P\{X = b_i | X > 0\}, \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

Якщо задано розподіл X: $P\{X = b_i\} = p_i$, $(i = 0, 1, 2, \dots)$, то розподіл Y визначається як [1; 2]:

$$P\{Y = b_i\} = \frac{p_i}{1 - p_0}, \qquad i = 0, 1, 2, \dots$$

Якщо відомі розподіли випадкових величин I та Y відповідно:

$$\mathrm{I}: \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 - p_0' & p_0' \end{pmatrix} \quad \text{та} \qquad P\{Y = b_i\} = p_i', \ (i = 0, 1, 2, \dots),$$

тоді [1; 2]:

$$P\{X = 0\} = p_0', \qquad P\{X = b_i\} = (1 - p_0')p_i', \qquad i = 0, 1, 2, \dots$$

Випадки множинних позовів

У страхуванні один договір може породити кілька позовів, тоді маємо структурування моделі:

$$X = Y_1 + Y_2 + \dots + Y_v,$$

де v — кількість позовів, Y_i — величина кожного позову. Математичне сподівання та дисперсія позову визначаються відповідно [1; 2]:

$$MX = MY_1 Mv$$

$$DX = DY_1 Mv + (MY_1)^2 Dv.$$

Приклади розподілів дискретної величини позову

Біноміальний розподіл. Використовується, якщо є n незалежних договорів страхування і ймовірність позову однакова для всіх договорів, наприклад рівна *p:*

$$P(\xi = m) = C_n^m p^m (1 - p)^{n-m}, \ m = 0, 1, \dots, n.$$

Тоді число позовів має біноміальний розподіл з параметрами n і p.

Розподіл Пуассона. У моделюванні страхових ризиків цей розподіл застосовується, якщо:

а) на коротких часових інтервалах Δt може бути пред'явлене не більше одного позову;

б) імовірність того, що буде пред'явлено тільки один позов дорівнює $\lambda\Delta t$;

в) часові інтервали, що не перетинаються, незалежні.

$$P(\xi = k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!},\ \text{k=0,1,2,…}$$

Розподіл Пуассона зазвичай використовуватися в якості наближення біноміального розподілу, якщо n велике, а p мале. Тоді $\lambda = np$ [3; 6].

2. Моделі індивідуального ризику на малих проміжках часу

Модель індивідуального ризику розглядає суми страхових виплат по кожному договору і дозволяє, за певних припущень, обчислити ймовірність банкрутства страхової компанії.

Нехай X_i — випадкова величина страхового позову за i-им договором, що розглядається незалежно від інших договорів. Тоді сумарний позов S визначається як: $S = \sum_{i=1}^{N} X_i$, де N —фіксована кількість страхових договорів у портфелі. При цьому кожний X_i однаково розподілено відповідно до умов договору. Ймовірність банкрутства визначається як:

$R = P\{\sum_{i=1}^{N} X_i > u\}$, де u — резервний капітал компанії.

У припущенні, що розподіли величин позовів $X_1, X_2, \dots, X_N$ відомі й випадкові величини $X_1, X_2, \dots, X_N$ незалежні, розподіл суми $\sum_{i=1}^{N} X_i$ можна обчислити як згортку розподілів цих випадкових величин. Але, якщо число договорів N велике, тоді виникає необхідність застосування апроксимаційних формул для функції розподілу сумарних виплат (*нормальна апроксимація, пуассонівська апроксимація, Г – апроксимація*). Теоретичним підґрунтям для цього можуть служити граничні теореми для розподілу сум випадкових величин і, у першу чергу, центральна гранична теорема (ЦГТ) [3; 4; 6].

3. Моделі колективного ризику

Модель колективного ризику базується на таких припущеннях:

- Аналізується фіксований короткий інтервал часу;
- Плата за страховку вноситься на початку періоду страхування, розрахунок проводиться в кінці, надходжень протягом цього періоду немає;
- Позови $Y_1, Y_2, \ldots$, що надходять до компанії, не пов'язані з конкретними договорами, а розглядаються як результат сумарного ризику компанії;
- Випадкова величина v – загальне число позовів за період страхування [1, 92].

Ймовірність банкрутства R, як і для моделі індивідуального ризику, визначається величиною резервного капіталу u та сумарним позовом $S_v = Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_v$.

Для обчислення ймовірності банкрутства $R = P\{S_v > u\}$ застосовується формула повної ймовірності:

$$R = P\{S_v > u\} = P\left\{S_v > u, \bigcup_{n=0}^{\infty}\{v = n\}\right\} = \sum_{n=0}^{\infty} P\{S_v > u, v = n\}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} P\{S_n > u, v = n\} = \sum_{n=1}^{\infty} P\{S_n > u\}P\{v = n\}$$

4. Практичні розрахунки

Приклад 1. Знаходження ймовірності пред'явлення позову.

Ймовірність пред'явлення позову по 4 незалежним договорам страхування життя в календарному році рівна 0,25. Знайти ймовірність того, що буде пред'явлено 0,1,2,3,4 страхові позови. Визначити ймовірність того, що буде пред'явлено 2 або більше позовів.

Розв'язання:

Маємо 4 незалежних договорів страхування; імовірність позову однакова для всіх договорів і рівна 0,25. Тоді число позовів N має біноміальний розподіл з параметрами n=4 і p=0,25.

Імовірності знайдемо за формулою:

$$P(\xi = m) = C_n^m p^m (1-p)^{n-m}, \text{ m=0,1,…,n,}$$

$$P(\xi = 0) = C_4^0(0{,}25)^0(1-0{,}25)^{4-0} = 0{,}75^4 = 0{,}32$$

$$P(\xi = 1) = C_4^1(0{,}25)^1(1-0{,}25)^{4-1} = 4 \cdot 0{,}25 \cdot 0{,}75^3 = 0{,}42$$

$$P(\xi = 2) = C_4^2(0{,}25)^2(1-0{,}25)^{4-2} = 6 \cdot 0{,}25^2 \cdot 0{,}75^2 = 0{,}21$$

$$P(\xi = 3) = C_4^3(0{,}25)^3(1-0{,}25)^{4-3} = 4 \cdot 0{,}25^3 \cdot 0{,}75 = 0{,}045$$

$$P(\xi = 4) = C_4^4(0{,}25)^4(1-0{,}25)^{4-4} = 0{,}25^4 = 0{,}005$$

$$P(\xi \geq 2) = 0{,}21 + 0{,}045 + 0{,}005 = 0{,}26$$

Відповідь: $P(\xi = 0) = 0{,}32$, $P(\xi = 1) = 0{,}42$, $P(\xi = 2) = 0{,}21$,

$P(\xi = 3) = 0{,}045$, $P(\xi = 4) = 0{,}005$, $P(\xi \geq 2) = 0{,}26$.

Приклад 2. Знаходження розподілів величин структурованої моделі

Розглянемо страхування життя на один рік з величиною страхової виплати b_1=500 000 грн. у випадку смерті від нещасного випадку (ймовірність цієї події q_1=0,0004) і виплатою b_2=100 000 грн. у випадку смерті внаслідок природних причин (ймовірність цієї події q_2=0,0020). Знайти розподіли величин I та Y.

Розв'язання. Розподілом X є

$$\begin{pmatrix} 0 & 100\,000 & 500\,000 \\ 0{,}9976 & 0{,}0020 & 0{,}0004 \end{pmatrix}$$

Знайдемо розподіл I.

$$P\{I = 1\} = P\{X > 0\} = P\{X = 500\,000\} + P\{X = 100\,000\} = 0{,}0024,$$

$$P\{I = 0\} = P\{X = 0\} = 0{,}9976,$$

тобто розподілом I є

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0{,}9976 & 0{,}0024 \end{pmatrix}$$

Тоді

$$P\{Y = 500\,000\} = P\{X = 500\,000 |\, X > 0\} = \frac{P\{X = 500\,000\}}{P\{\,X > 0\}} = {}^1\!/_6$$

$$P\{Y = 100\,000\} = P\{X = 100\,000 |\, X > 0\} = \frac{P\{X = 100\,000\}}{P\{\,X > 0\}} = {}^5\!/_6$$

отже, розподілом Y є

$$\begin{pmatrix} 100\,000 & 500\,000 \\ {}^5\!/_6 & {}^1\!/_6 \end{pmatrix}$$

Приклад 3.Знаходження ймовірності банкрутства від капіталу компанії
Нехай за фіксований короткий проміжок часу портфель договорів страхової компанії може породити 0, 1, 2, 3 позови з ймовірностями 0,2; 0,3; 0,4; 0,1 відповідно. У випадку, якщо позов поданий, його величина дорівнює 1, 2, 3 (умовних грошових одиниць) з ймовірностями 0,5; 0,4; 0,1 відповідно. Визначити залежність ймовірності банкрутства від капіталу компанії.

Розв'язання:

Спочатку знайдемо розподіли випадкових величин $Y_1,\ Y_1+Y_2,\ Y_1+Y_2+Y_3$.

Кожна випадкова величина $Y_i (i = 1,2,3)$ має розподіл:

1	2	3
0,5	0,4	0,1

Спільний розподіл Y_1, Y_2:

Y_1	Y_2		
	1	2	3
1	0,25	0,2	0,05
2	0,2	0,16	0,04
3	0,05	0,04	0,01

Тоді розподіл суми $Y_1 + Y_2$ має вигляд:

1	2	3	4	5	6
0	0,25	0,4	0,26	0,08	0,01

Спільний розподіл $(Y_1 + Y_2, Y_3)$ дорівнює:

Y_3	$Y_1 + Y_2$					
	1	2	3	4	5	6
1	0	0,125	0,2	0,13	0,04	0,005
2	0	0,1	0,16	0,104	0,032	0,004
3	0	0,025	0,04	0,026	0,008	0,001

Тоді розподіл суми $(Y_1 + Y_2 + Y_3)$ наступний:

1	2	3	4	5	6	7	8	9

0	0	0,125	0,3	0,315	0,184	0,063	0,012	0,001

Розподіл числа позовів *v* до страхової компанії:

0	1	2	3
0,2	0,3	0,4	0,1

Знайдемо розподіл сумарного позову $S_v = Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_v$ за формулою:
$P\{S_v = k\} = \sum_{n=1}^{\infty} P\{S_n = k\}\pi_n = \sum_{n=1}^{\infty} P\{Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_n = k\}P\{v = n\}$.

Звідси одержимо:

$$P\{S_v = 0\} = P\{v = 0\} = 0{,}2$$

$$P\{S_v = 1\} = P\{Y_1 = 1\}P\{v = 1\} + P\{Y_1 + Y_2 = 1\}P\{v = 2\}$$
$$+ P\{Y_1 + Y_2 + Y_3 = 1\}P\{v = 3\} = 0{,}5 \cdot 0{,}3 + 0 \cdot 0{,}4 + 0 \cdot 0{,}1 = 0{,}15$$

$$P\{S_v = 2\} = P\{Y_1 = 2\}P\{v = 1\} + P\{Y_1 + Y_2 = 2\}P\{v = 2\}$$
$$+ P\{Y_1 + Y_2 + Y_3 = 2\}P\{v = 3\} = 0{,}4 \cdot 0{,}3 + 0{,}25 \cdot 0{,}4 + 0 \cdot 0{,}1$$
$$= 0{,}22$$

$$P\{S_v = 3\} = 0{,}1 \cdot 0{,}3 + 0{,}4 \cdot 0{,}4 + 0{,}125 \cdot 0{,}1 = 0{,}2025$$

$$P\{S_v = 4\} = 0 \cdot 0{,}3 + 0{,}26 \cdot 0{,}4 + 0{,}3 \cdot 0{,}1 = 0{,}134$$

$$P\{S_v = 5\} = 0 \cdot 0{,}3 + 0{,}08 \cdot 0{,}4 + 0{,}315 \cdot 0{,}1 = 0{,}0635$$

$$P\{S_v = 6\} = 0 \cdot 0{,}3 + 0{,}01 \cdot 0{,}4 + 0{,}184 \cdot 0{,}1 = 0{,}0224$$

$$P\{S_v = 7\} = 0 \cdot 0{,}3 + 0 \cdot 0{,}4 + 0{,}063 \cdot 0{,}1 = 0{,}0063$$

$$P\{S_v = 8\} = 0 \cdot 0{,}3 + 0 \cdot 0{,}4 + 0{,}012 \cdot 0{,}1 = 0{,}0012$$

$$P\{S_v = 9\} = 0 \cdot 0{,}3 + 0 \cdot 0{,}4 + 0{,}001 \cdot 0{,}1 = 0{,}0001$$

Отже, розподіл сумарного позову S_v дорівнює:

k	$P\{S_v = k\}$
0	0,2
1	0,15
2	0,22
3	0,2025
4	0,134
5	0,0635
6	0,0224
7	0,0063
8	0,0012

9	0,0001

Знаючи розподіл S_v, знайдемо ймовірність банкрутства *R(u)*:

$$R(u) = P\{S_v > u\} = \sum_{k=u+1}^{\infty} P\{S_v = k\}$$

та подамо значення *R(u)* у таблиці:

u	*R(u)*
0	0,8
1	0,65
2	0,43
3	0,2275
4	0,0935
5	0,03
6	0,0076
7	0,0013
8	0,0001
9	0

Висновки та перспективи подальших досліджень. У статті було проаналізовано теоретичні основи та практичні аспекти використання математичних моделей для оцінки страхових ризиків. Розглянуто модель індивідуальних позовів, моделі індивідуального та колективного ризиків, які дозволяють оцінити ймовірність банкрутства страхової компанії через сумарний позов та визначити мінімальний резервний капітал для забезпечення фінансової стійкості.

Практичні приклади демонструють застосування ймовірнісних методів, апроксимацій, зокрема нормальної, та використання методу центральної граничної теореми для оцінки розподілу сумарних позовів.

Створені у кваліфікаційній роботі методичні рекомендації можуть бути використані для навчання студентів курсам із актуарної математики та страхового ризик-менеджменту. Застосування ймовірнісних методів дозволяє ефективно моделювати та аналізувати фінансові ризики, підвищуючи якість управління страховими портфелями. Подальші дослідження можуть бути спрямовані на розробку моделей для врахування залежностей між окремими позовами та зовнішніми економічними факторами.

Список використаної літератури

1. **Бондаренко Я. С.** Теорія ризику у страхуванні. Основні поняття, приклади, задачі: навч. посібник./ Я.С.Бондаренко, В.М.Турчин, Є.В.Турчин. – Д.: РВВ ДНУ, 2010 – 180 с.
2. **Бондаренко Я. С.** Теорія ризику в страхуванні: навч. посіб./ Я. С. Бондаренко, В.М. Турчин, Є.В. Турчин. – Д.:РВВ ДНУ, 2008 – 112 с.
3. **Зінченко Н. М.** Математичні методи в теорії ризику. – К.: ВПЦ "Київський університет", 2008. – 213 с.
4. **Кендалл М. Дж., Стьюарт А.** Теория распределений. – М.: Наука, 1966. – 587 с.
5. **Кофанов В.О.** Основи актуарної математики // ДНУ: Дніпропетровськ – 2005. – 96 с.
6. **Леоненко М.М., Мішура Ю.С., Пархоменко В.М. Ядренко М.Й.** Теоретико-ймовірнісні та статистичні методи в економетриці та фінансовій математиці. Київ, 1995, 379 с.
7. **Терещенко Т.Є., Заволока Л.О., Пономарьова О.Б**. Страхування (у схемах, таблицях, коментарях): навч. посібник. – Дніпро: Університет митної справи та фінансів, 2020. – 221 с. – (Серія «Бізнес. Економіка. Фінанси»)

Відомості про автора:

Сотник Катерина Олегівна – студентка II курсу магістратури факультету математики, природничих наук та технологій Центральноукраїнського державного університету імені Володимира Винниченка, тел. +380661023913, e-mail: 11410842@cuspu.edu.ua