УДК 514:005.31

ЗАСТОСУВАННЯ ВЕКТОРНОЇ АЛГЕБРИ В ГЕОМЕТРИЧНОМУ МОДЕЛЮВАННІ

Зеньков Дмитро, Яременко Юрій

Науковий керівник: канд. фіз.-мат. наук, доцент Яременко Ю.В.

Центральноукраїнський державний університет імені Володимира Винниченка, м. Кропивницький, Україна

У статті розглядається роль векторної алгебри у геометричному моделюванні. Зазначено, що векторна алгебра є потужним інструментом для опису та аналізу просторових відношень, забезпечуючи математичну точність при створенні тривимірних моделей. Основна увага приділяється застосуванню векторів для моделювання геометричних об'єктів, таких як прямі, площини та об'ємні фігури, а також використанню основних векторних операцій для вирішення задач просторової геометрії. У статті також наведено приклади математичних підходів, що базуються на векторному апараті, зокрема параметричні рівняння прямих, опис площин через нормальні вектори та обчислення об'ємів за допомогою мішаного добутку.

Ключові слова: *Векторна алгебра, геометричне моделювання, тривимірні моделі, параметричні рівняння.*

Application of vector algebra in geometric modeling

Dmytro Zenkov, Yuriy Yaremenko

Scientific supervisor: Candidate of Physical and Mathematical Sciences, associate professor Yaremenko Y.V.

Volodymyr Vynnychenko Central Ukrainian State University, Kropyvnytsky, Ukraine

The article deals with the role of vector algebra in geometric modeling. It is noted that vector algebra is a powerful tool for describing and analyzing spatial relations, providing mathematical accuracy in creating three-dimensional models. The focus is on the use of vectors to model geometric objects such as lines, planes, and three-dimensional shapes, as well as the use of basic vector operations to solve problems in spatial geometry. The article also provides examples of mathematical approaches based on the vector apparatus, including parametric equations of lines, description of planes using normal vectors, and calculation of volumes using a mixed product.

Keywords: *Vector algebra, geometric modeling, three-dimensional models, parametric equations.*

Постановка проблеми .У статті піднімається питання ефективного використання векторної алгебри для моделювання геометричних об'єктів у тривимірному просторі. Незважаючи на переваги векторного підходу, зазначено, що існують певні обмеження, пов’язані з його застосуванням для складних і нерегулярних геометричних об'єктів. Основна проблема полягає в тому, що моделювання об'єктів із високим рівнем деталізації або нерівними поверхнями може вимагати значних обчислювальних ресурсів і складних математичних перетворень. Тому автори наголошують на необхідності поєднання векторної алгебри з іншими підходами, наприклад з використанням тензорного аналізу, що дасть можливість розв’язувати більш складні задачі геометричного моделювання.

Аналіз досліджень і публікацій. Дослідження та література з векторної алгебри зосереджуються на численних напрямках її застосування, включаючи фізичні науки, комп'ютерну графіку, теорію сигналів, оптимізацію та обробку великих даних. Аналіз літератури з даної теми демонструє багатогранність векторної алгебри як основи для багатьох математичних і наукових дисциплін. Джерела охоплюють як теоретичні аспекти векторного простору, базисів та лінійних перетворень (Ольвер, Шакібан, 2018 [1]; Строян [2]), так і прикладні підходи для обробки сигналів, систем, графіки та криптографії (Міллер, 1999 [3]; Первас, 2009 [4]; Буррус, 2019 [5]; Апарна, 2016 [6]). Українські підручники надають важливу базу для освітнього процесу, описуючи фундаментальні концепції та приклади з реального життя, що робить їх особливо корисними для студентів та інженерів (Булдигін, Алєксєєва, 2011 [7]; Гриньов, Кириченко, 2008 [8] і ін.). Загалом, література показує ключову роль векторної алгебри у розвитку сучасних технологій, таких як комп'ютерна графіка, топологічний аналіз даних, фізика, що підкреслює її універсальність та необхідність для технічних застосувань.

Виклад основного матеріалу (результатів) дослідження. Геометричне моделювання спирається на математичні методи аналітичної геометрії, що дають можливість створювати та трансформувати двовимірні і тривимірні об'єкти.

Векторна алгебра відіграє важливу роль у побудові геометричних моделей, надаючи потужні інструменти для опису та аналізу просторових відношень. У процесі моделювання геометричних об'єктів вектори дозволяють представляти координати точок, напрямки, відстані та інші фундаментальні характеристики з високою точністю та узгодженістю. Використовуючи вектори, моделі можуть об'єднувати різні аспекти геометрії, що забезпечує легкість переходу між різними видами задач, такими як обчислення кутів, площ та об'ємів. Вектори дозволяють легко визначати орієнтацію об'єктів у просторі, їх розташування відносно один одного та зручним чином виявляти можливі взаємодії між ними.

Застосування векторів у геометричному моделюванні є ключовим для точного опису просторових відношень, оскільки вони дозволяють створювати тривимірні структури, зберігаючи математичну коректність і структурну інтеграцію даних. Використання векторних операцій, таких як додавання та віднімання векторів, добуток вектора на число, скалярний, векторний та мішаний добутки, дає змогу ефективно обчислювати параметри об'єктів та виявляти їх зв'язки з іншими елементами моделі. Це особливо важливо для розв'язання просторових задач, де необхідно враховувати складні геометричні перетворення, наприклад, повороти, масштабування чи паралельне перенесення. Векторна алгебра також забезпечує необхідний математичний апарат для автоматизації цих процесів, що є ключовим фактором в інженерному, архітектурному та науковому моделюванні.

Розглянемо найпростіші приклади геометричного моделювання.

1). *Моделювання прямих через вектори.* У просторі пряма може бути задана за допомогою направляючого вектора та точки, яка належить прямій (див. рис. 1). Для задання прямої в тривимірному просторі достатньо знати точку $M_0\,(x_0,y_0,z_0)$ на прямій та вектор напрямку $\vec{p}=(\alpha,\ \beta,\ \gamma)$. Тоді параметричні рівняння прямої матимуть вигляд: $\begin{cases} x=\alpha t+x_0, \\ y=\beta t+y_0, \\ z=\gamma t+z_0. \end{cases}$ де t параметр (див. наприклад [9, с.101]). Це дозволяє вільно змінювати положення точки на прямій, обираючи різні значення параметра *t*. Векторний підхід надає універсальний інструмент для обчислення, наприклад, кутів між прямими чи знаходження точок перетину.

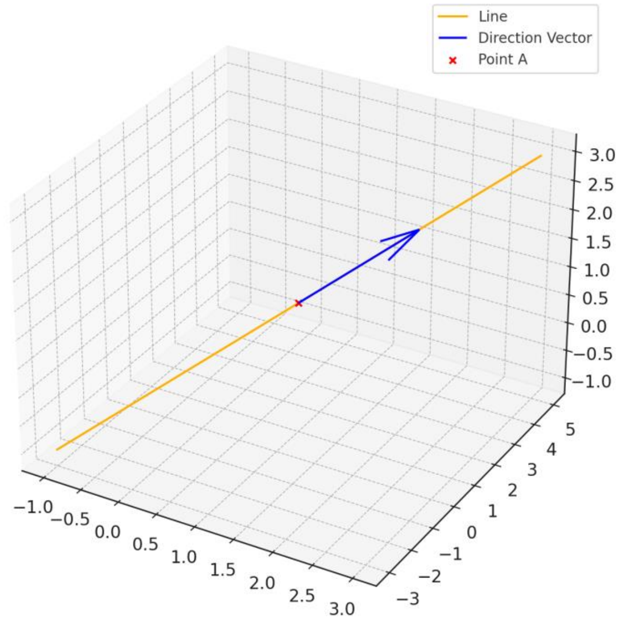

Рис. 1 Моделювання прямих через вектори

2). *Вектори в рівняннях площин.* Площина в просторі також може бути ефективно задана векторним підходом, зокрема через нормальний вектор та точку на площині.

Нехай точка M_0 (x_0,y_0,z_0) лежить на площині, а $\vec{n}=(A, B, C)$ — нормальний вектор цієї площини. Тоді рівняння площини має вигляд:

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0 \quad [9, с.85].$$

Це рівняння зручно використовувати для визначення розташування точок відносно площини (наприклад, чи лежить точка на площині, чи лежать точки з однієї сторони від площини, чи лежать дві точки по різні сторони від площини), а також для знаходження кутів між площинами, якщо відомі їх нормальні вектори і ін.

3). *Моделювання об'ємів за допомогою векторів.* Для опису об'ємних фігур можна використати вектори. Наприклад, для паралелепіпеда, використовують вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ для задання його ребер (див. рис. 2). Якщо ж задано вершини то легко знайти і вектори, які визначать ребра цього паралелепіпеда. Тоді об’єм паралелепіпеда можна знайти за допомогою мішаного добутку: $V=|(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})|$.

(Якщо вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ не компланарні, то модуль мішаного добутку $|(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})|$ дорівнює об'єму паралелепіпеда побудованого на векторах $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$) [9, с.47]. У цьому і полягає геометричний зміст мішаного добутку.

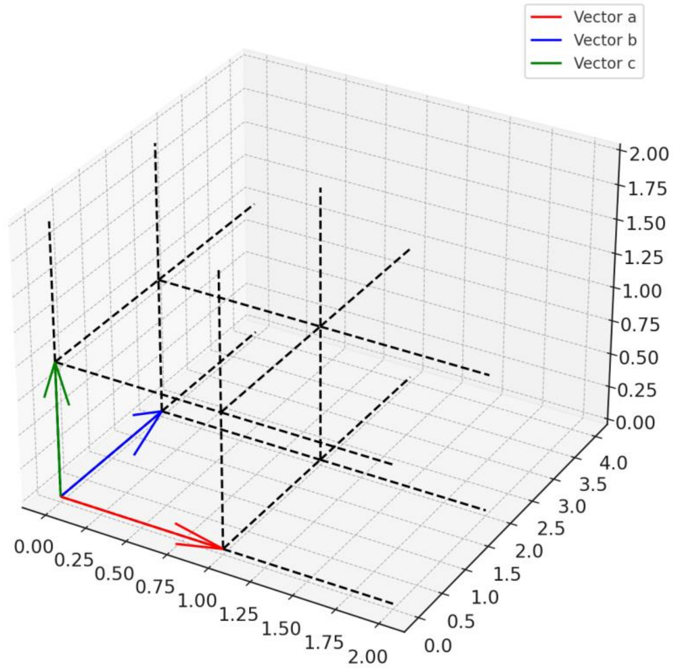

Рис. 2. Моделювання об'ємів за допомогою векторів

Ясно, що об'єм тетраедра, побудованого на векторах $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ рівний $\frac{1}{6}|(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})|$. Для знаходження об'ємів довільних многогранників розбиваємо їх на тетраедри і паралелепіпеди. Використання векторів значно спрощує такі обчислення і дозволяє точно визначати властивості об'ємних об'єктів, такі як орієнтація в просторі чи взаємодія з іншими об'єктами.

Використання векторів значно спрощує математичні операції, які є базовими для опису просторових характеристик об'єктів, таких як позиція, напрямок або довжина. Векторна алгебра дозволяє легко виконувати операції додавання, віднімання, скалярного та векторного добутків, що робить обчислення систематизованими й уніфікованими. Це, в свою чергу, сприяє стандартизації алгоритмів, які застосовуються для побудови моделей та подальших маніпуляцій з ними, полегшуючи створення універсальних програмних бібліотек і математичних інструментів для обчислень у багатьох сферах науки та техніки.

Проте, незважаючи на значні переваги, векторний підхід має певні обмеження, особливо коли йдеться про моделювання складних об'єктів із високим рівнем деталізації. Моделювання об'єктів з нерівними або неоднорідними поверхнями може потребувати складних векторних обчислень, які можуть бути обтяжливими з точки зору обсягу обробки даних та обчислювальної потужності. Більше того, векторний підхід вимагає певного рівня абстракції, що може ускладнити інтерпретацію результатів для складних систем, де врахування вигинів, переходів або інших характеристик вимагає значних математичних перетворень. Це робить необхідним використання додаткових методів або комбінацій з іншими підходами, такими як тензорний аналіз, для більш складних або нерегулярних геометричних об'єктів.

Основні результати векторного моделювання демонструють його ефективність у багатьох задачах прикладної геометрії, особливо для розрахунків на площині та в тривимірному просторі. До основних методів, які застосовуються у векторному моделюванні, належать скалярний, векторний та мішаний добутки для визначення напрямків і нормалей, обчислення об'ємів і площ за допомогою векторних перетворень, а також використання векторних рівнянь для моделювання руху та траєкторій об'єктів. Ці методи дозволяють досягати точності й системності при моделюванні, створюючи надійну математичну основу для аналізу просторових відношень і взаємодій об'єктів у різних областях науки та техніки.

Висновки та перспективи подальших пошуків у напрямі дослідження. Отже, векторний підхід до моделювання геометричних об'єктів надає суттєві переваги завдяки можливості стандартизації та спрощення обчислень. Використання інформаційно-комунікаційних технологій у процесі моделювання сприяє активізації творчості учнів і студентів, допомагає розвивати навички роботи з інформацією та співпраці в команді. Це дозволяє формувати практичні навички, а також розвивати як геометричні, так і інформаційно-комунікаційні компетентності, забезпечуючи ефективну взаємодію між різними навчальними предметами. Перспективи подальших досліджень включають розробку методичних рекомендацій до інтеграції векторної алгебри до задач геометрії у позакласній роботі, адаптованих до різних вікових груп учнів та студентів.

Список використаної літератури:

1. Ольвер П., Шакібан К. Векторні простори та базиси. 2018. URL: https://link.springer.com/chapter/10.1007/978-3-319-91041-3_2
2. Строян К. Аналітична векторна геометрія. 1993, 321-341. URL: https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/B9780126729719500220?via%3Dihub
3. Міллер Дж. Векторна геометрія для комп'ютерної графіки. IEEE Computer Graphics and Applications, 1999, 19, 66-73. URL: https://ieeexplore.ieee.org//76document1552
4. Первас К. Геометрична алгебра з застосуваннями в інженерії. 2009, 4, 1-385. URL: https://link.springer.com/book/10.1007/978-3-540-89068-3
5. Беррус К. Векторний простір та матричні методи в теорії сигналів та систем. *arXiv:* Обробка сигналів. 2019. https://arxiv.org/abs/1909.05128
6. Апарна М. Застосування матричної математики. *International Education and Research Journal,* 2016, 2, 12. https://www.researchgate.net/publication/346489175_Applications_Of_Matrix_Mathematics-DrMAparna
7. В. В. Булдигін, І. В. Алєксєєва, В. О. Гайдей, О. О. Диховичний, Н. Р. Коновалова, Л. Б. Федорова. Лінійна алгебра та аналітична геометрія: Навч. посібник. В. В. Булдигіна. 2011. 224 с.
8. Гриньов Б. В., Кириченко І. К. Векторна алгебра. Підручний для вищих технічних навчальних закладів. 2008. 164 с. URL: https://pdf.lib.vntu.edu.ua/books/2015/Grunyov_2008_164.pdf
9. Яременко Ю.В., Лутченко Л.І. Аналітична геометрія. Ч.1. : Навч. посібник. Кіровоград. 2006. 122 с.

Відомості про авторів:

Зеньков Дмитро Олександрович – студент ІІ курсу магістратури факультету математики, природничих наук та технологій Центральноукраїнського державного університету імені Володимира Винниченка, тел. +380500823267, e-mail: goodvgame12345@gmail.com.

Яременко Юрій Вікторович – кандидат фізико-математичних наук, доцент, доцент кафедри математики та цифрових технологій Центральноукраїнського державного університету імені Володимира Винниченка, тел. +380504870618, e-mail: yaremenk1959@gmail.com.