УДК 376

ЕЛЕМЕНТИ КОМПЛЕКСНОГО АНАЛІЗУ ЯК СПЕЦКУРС ШКІЛЬНОГО КУРСУ МАТЕМАТИКИ

Кімеле Лантана, Ключник Інна

Науковий керівник : канд. фіз.-мат. наук, доцент Ключник І.Г.

Центральноукраїнський державний університет імені Володимира Винниченка, м. Кропивницький, Україна

У статті обґрунтовано доцільність впровадження елементів комплексного аналізу в шкільний курс математики. Розглянуто основні поняття та операції з комплексними числами, їх історичний розвиток і сучасне застосування. Проаналізовано методичні підходи до викладання цієї теми в школі, запропоновано інтерактивні підходи до навчання, зразки задач, а також рекомендації для адаптації складного матеріалу до рівня середньої освіти.

***Ключові слова**: комплексний аналіз, шкільна математика, комплексні числа, методика викладання, математична освіта.*

Elements of complex analysis as a special course in the school mathematics curriculum

L. Kimele, I. Kliuchnyk

Scientific supervisor: Candidate of Physics and Mathematics Sciences, associate professor Kliuchnyk I. G.

Volodymyr Vynnychenko Central Ukrainian State University,
Kropyvnytsky, Ukraine

The article substantiates the feasibility of introducing elements of complex analysis into the school mathematics curriculum. Basic concepts and operations with complex numbers, their historical development, and modern applications are considered. Methodological approaches to teaching this topic at school are analyzed, interactive learning strategies and sample problems are proposed, as well as recommendations for adapting complex material to the level of secondary education.

***Keywords:** complex analysis, school mathematics, complex numbers, teaching methodology, mathematical education.*

Постановка проблеми. Математика є фундаментальною дисципліною, яка формує базу для розвитку логічного мислення, критичного аналізу та навичок розв'язання складних завдань. У сучасному світі ці компетенції є необхідними не лише для наукової чи технічної діяльності, але й для прийняття рішень у повсякденному житті.

Комплексний аналіз, як один із ключових розділів математики, зосереджується на вивченні функцій комплексної змінної. Його теорія та методи знаходять численні застосування в різних галузях науки і техніки. Зокрема, він використовується в:

- **Інженерії** (аналіз електричних кіл, проектування сигналів і систем);
- **Фізиці** (розв'язання задач квантової механіки, теорії поля);
- **Програмуванні та обчислювальній техніці** (алгоритми обробки сигналів, криптографія);
- **Економіці** (моделювання та оптимізація процесів).

Попри важливість комплексного аналізу, його викладання традиційно обмежується рівнем університетської освіти. Це створює розрив між теоретичною підготовкою учнів шкіл та тими вимогами, які ставлять перед ними сучасні технічні спеціальності. Впровадження основ комплексного аналізу у шкільний курс математики може значно покращити:

1. **Підготовку до вступу у ВНЗ**, особливо на спеціальності, пов'язані з технічними чи природничими науками.
2. **Розуміння учнями сучасних міждисциплінарних підходів**, які потребують поєднання різних методів і концепцій.
3. **Розвиток аналітичного мислення та творчих здібностей**, що є ключовими навичками в XXI столітті.

На даний час програма з математики у школах орієнтована на базові теми, що забезпечують лише загальні знання, без акценту на більш просунутих чи спеціалізованих аспектах. У цьому контексті постає питання: **Як впровадження**

основ комплексного аналізу у шкільний курс математики може сприяти формуванню необхідних компетенцій для майбутньої освіти та професійної діяльності учнів?

Ця проблема є актуальною не лише з точки зору модернізації навчального процесу, але й у контексті підвищення конкурентоспроможності випускників українських шкіл на світовому рівні. Вирішення цієї проблеми вимагає розробки відповідних методик, підготовки педагогів та адаптації навчальних матеріалів до рівня знань і потреб школярів.

Метою дослідження є створення науково обґрунтованих та практично орієнтованих методичних рекомендацій для інтеграції основ комплексного аналізу в шкільний курс математики, що сприятиме підвищенню рівня математичної освіти та підготовки учнів до подальшого навчання і професійної діяльності.

Для досягнення цієї мети було визначено такі **завдання**:

1. **Дослідити історичний розвиток і основні поняття комплексного аналізу.**
   - Провести огляд історії виникнення та еволюції комплексного аналізу як математичної дисципліни.
   - Визначити ключові поняття (комплексні числа, функції комплексної змінної, диференціювання і інтегрування у комплексній площині) та їх роль у розвитку математики і її прикладних аспектів.
   - Дослідити існуючі підходи до викладання комплексного аналізу у вищій школі та міжнародний досвід впровадження цих знань у середню освіту.
2. **Проаналізувати можливості інтеграції понять комплексного аналізу в шкільну програму.**
   - Провести аналіз чинної шкільної програми з математики, визначити її потенціал для включення елементів комплексного аналізу.
   - Оцінити рівень математичної підготовки учнів старших класів з точки зору можливості засвоєння тем, пов’язаних з комплексними числами та їх застосуванням.

- Визначити теми і розділи, які можна адаптувати до шкільного рівня (наприклад, геометрична інтерпретація комплексних чисел, основи роботи з комплексними числами).

3. **Розробити методичні матеріали, приклади задач і рекомендації для викладання тем, пов'язаних із комплексним аналізом.**
   - Підготувати дидактичні матеріали, що пояснюють базові концепції комплексного аналізу у доступній для учнів формі.
   - Сформулювати приклади навчальних завдань, вправ і задач, які демонструють практичне застосування комплексних чисел у математиці, фізиці, інженерії чи комп'ютерних науках.
   - Розробити рекомендації для вчителів, які включають методи подачі матеріалу, інтерактивні підходи до викладання та інструменти оцінювання знань учнів.
   - Створити методичні рекомендації для організації факультативів або додаткових занять, присвячених комплексному аналізу, у старших класах.

Таким чином, дослідження спрямоване не лише на адаптацію складного математичного матеріалу до шкільного рівня, але й на створення умов для зацікавлення учнів, розвитку їх математичної культури та підвищення мотивації до вивчення математики.

Виклад основного матеріалу (результатів) дослідження. Сучасний світ переживає швидкий технологічний розвиток, що супроводжується зростанням потреби у фахівцях із високим рівнем математичних знань та навичок. Освітні системи різних країн активно інтегрують наукові знання, щоб забезпечити учням компетенції, необхідні для адаптації до викликів цифрової епохи. Одним із таких викликів є здатність працювати з абстрактними концепціями, які знаходять застосування у технічних дисциплінах, фізиці, інженерії та комп'ютерних науках.

Комплексний аналіз, будучи теоретичною основою багатьох сучасних технологій, є одним із ключових математичних інструментів для моделювання, аналізу та вирішення задач. Оволодіння його основами розвиває такі важливі навички як:

- **Аналітичне мислення** – здатність логічно структурувати та розв'язувати складні завдання.
- **Міждисциплінарність** – використання математичного апарату в інших науках і технічних галузях.
- **Креативність** – пошук нестандартних підходів до задач.

У цьому контексті включення основ комплексного аналізу в шкільну програму може не лише розширити інтелектуальний горизонт учнів, а й підготувати їх до вирішення реальних задач у майбутній професійній діяльності.

Історичний розвиток комплексних чисел

Комплексні числа, які є основою комплексного аналізу, мають довгу та цікаву історію, пов'язану із розв'язанням алгебраїчних рівнянь.

1. **Раннє виникнення (XVI століття).** Комплексні числа вперше з'явилися в роботах італійського математика Джіроламо Кардано (1501–1576). У своїй праці *«Ars Magna»* (1545 р.) він розглядав розв'язки кубічних рівнянь, які в деяких випадках містили корені з від'ємних чисел. Це були перші згадки про уявні числа, хоча Кардано сам називав їх "витонченими, але марними".
2. **Перші правила дій (XVI століття).** Рафаель Бомбеллі (1526–1572), сучасник Кардано, зробив значний внесок у розвиток теорії. У своїй роботі *«L'Algebra»* він уперше встановив чіткі правила дій із числами, що містять квадратний корінь із від'ємного числа. Це стало основою для подальшого розвитку алгебри комплексних чисел.
3. **Геометрична інтерпретація (XVIII–XIX століття).**
   - Карл Фрідріх Гаусс (1777–1855) запропонував геометричну інтерпретацію комплексних чисел, представивши їх як точки на площині, де дійсна частина числа відповідає координаті xxx, а уявна частина – координаті

ууу. Ця площина, яку ми зараз називаємо площиною Аргана-Гаусса, стала потужним інструментом для аналізу властивостей комплексних чисел.

- Незалежно від Гаусса, французький математик Жан-Робер Арган також працював над графічним зображенням комплексних чисел у своїй книзі *«Essai sur une manière de représenter les quantités imaginaires dans les constructions géométriques»* (1806 р.).

4. **Формалізація та розширення (XIX століття).** У XIX столітті комплексні числа були формалізовані як окремий математичний об’єкт. Вільям Гамільтон (1805–1865) та інші математики розробили розширення теорії, включаючи кватерніони та більш загальні алгебраїчні структури.

5. **Сучасне розуміння (XX століття).** Завдяки працям таких математиків, як Огюстен-Луї Коші та Бернхард Ріман, теорія комплексних чисел перетворилася на комплексний аналіз – окремий розділ математики, який вивчає функції комплексної змінної. Цей розділ математики знайшов широке застосування в фізиці, інженерії та комп’ютерних науках.

Таким чином, розвиток комплексних чисел і їх геометрична інтерпретація відкрили нові горизонти для математики та її застосування. Інтеграція цих знань у шкільний курс допоможе учням зрозуміти глибокі математичні концепції, що формують базу для сучасної науки і техніки.

Основні поняття комплексного аналізу

Для впровадження основ комплексного аналізу у шкільний курс математики пропонується включити кілька ключових понять, адаптованих до рівня знань учнів старших класів. Ці поняття сприятимуть розширенню математичного кругозору учнів та їх підготовці до подальшого навчання.

1. Комплексні числа

Визначення: Комплексне число визначається як вираз вигляду: $\underline{z = a + bi,}$ де a і b – дійсні числа, а i – уявна одиниця, для якої виконується рівність: $\underline{i^2 = -1}$.

a називається дійсною частиною числа $(Re(z) = a)$, b називається уявною частиною числа $(Im(z) = b)$.

Приклади:

1. $z_1 = 3 + 4i$: дійсна частина $Re(z_1) = 3$, уявна частина $Im(z_1) = 4$.

2. $z_2 = -2 - 5i$: дійсна частина $Re(z_2) = -2$, уявна частина $Im(z_2) = -5$.

2. Операції з комплексними числами

Додавання: $z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i$.

Приклад: $(3 + 4i) + (2 - i) = 5 + 3i$.

Віднімання: $z_1 - z_2 = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)i$.

Приклад: $(3 + 4i) - (2 - i) = 1 + 5i$.

Множення: $z_1 \cdot z_2 = (a_1a_2 - b_1b_2) + (a_1b_2 + a_2b_1)i$.

Приклад: $(1 + 2i) \cdot (3 - i) = 5 + 5i$.

Ділення:

$z_1 / z_2 = (a_1 + b_1i) / (a_2 + b_2i) = ((a_1 + b_1i)(a_2 - b_2i)) / (a_2^2 + b_2^2)$.

Приклад: $(1 + i) / (2 - i) = (1/5) + (3/5)i$.

3. Геометричне представлення комплексних чисел

Модуль числа $|z|$:

Модуль комплексного числа $z = a + bi$ визначається як відстань від початку координат до точки (a, b): $|z| = \sqrt{(a^2 + b^2)}$.

Приклад: Для числа $z = 3 + 4i$: $|z| = 5$.

Аргумент числа $arg(z)$:

Аргумент комплексного числа z – це кут θ, який утворює вектор, що з'єднує точку (a, b) з початком координат, з позитивним напрямком осі x.

Приклад: Для числа $z = 1 + i$: $arg(z) = 45°$.

Полярна форма представлення:

Комплексне число може бути записане у вигляді:

$z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$.

Приклад: Для $z = 3 + 4i$: $z = 5(\cos 53° + i\sin 53°)$.

4. Застосування у задачах

1. Рух точок у площині:

Комплексні числа можна використовувати для опису руху точок. Наприклад, додавання комплексних чисел відповідає зміщенню точки на площині.

2. Моделювання хвильових процесів:

Комплексні числа зручно застосовувати для опису коливань і хвиль, використовуючи полярну форму для моделювання гармонічних процесів.

3. Симетрії в геометрії:

Обернення точки відносно заданої прямої або обертання навколо початку координат можна описати через операції з комплексними числами.

Приклад: Знайти точку, що отримується при повороті числа $z = 1 + i$ на $90°$:

$z' = z \cdot e^{(i\pi/2)} = -1 + i$.

Методичні підходи

Для ефективного викладання елементів комплексного аналізу у шкільній програмі пропонується використання сучасних методичних прийомів, що сприятимуть кращому розумінню та засвоєнню матеріалу учнями.

1. Використання візуалізації

Мета: Полегшити розуміння абстрактних понять комплексних чисел через їх графічне унаочнення.

Методи:

- ***Геометричне представлення на площині:***

Уроки повинні супроводжуватися малюнками, що зображують точки на площині Аргана-Гаусса. Учням пропонується знаходити координати точок (a, b), де a – дійсна частина, а b – уявна частина комплексного числа z = a + bi.

- ***Інтерактивні програми:***

Використання програмного забезпечення, такого як GeoGebra або Desmos, для візуалізації модулів, аргументів та полярної форми комплексних чисел.

- ***Анімації:***

Демонстрація руху точок у площині для пояснення таких понять, як обертання або зміщення комплексних чисел.

2. Інтерактивні підходи

Мета: Залучити учнів до активної участі в навчальному процесі, зробити матеріал цікавим і доступним.

Методи:

- ***Ігрові методи:***

- «Знайди пару»: Учням даються картки з комплексними числами у вигляді a + bi, а також картки із зображеннями точок на площині. Завдання – знайти відповідні пари.

- Інша версія гри – пошук пар для чисел у різних формах: алгебраїчній, полярній або їх графічного представлення.

- ***Квести:***

Завдання з пошуку модулів і аргументів комплексних чисел можна оформити як математичний квест із серією підказок і етапів.

- ***Групові проекти:***

Учні працюють у командах для створення власних задач із комплексними числами, наприклад, розробка геометричних фігур на площині за допомогою чисел у полярній формі.

3. Практичні задачі

Мета: Показати прикладне значення комплексних чисел, зв'язавши їх із реальними фізичними та технічними явищами.

Методи:

- ***Фізика і коливальні процеси:***

Запропонувати учням задачі, які показують використання комплексних чисел у гармонічних коливаннях.

- ***Інженерія і електротехніка:***

Ознайомити учнів із використанням комплексних чисел для розрахунку струмів і напруг у змінному струмі.

- ***Моделювання в програмуванні:***

Розглянути прості алгоритми, де використовуються комплексні числа, наприклад, у графіці для побудови фракталів.

- ***Геометричні задачі:***

Використовувати комплексні числа для знаходження центрів обертання, симетрій або інших геометричних перетворень.

Приклади задач

1. Модуль і аргумент числа

Задача: Знайти модуль і аргумент комплексного числа $z = -3 + 4i$.

Розв'язання:

1. Модуль числа:

Модуль $|z|$ обчислюється за формулою:

$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$, де $a = -3$, $b = 4$.

$|z| = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$.

2. Аргумент числа:

Аргумент $arg(z)$ – це кут θ, який утворює вектор із точкою $(-3, 4)$ на площині з додатним напрямком осі x.

Формула для обчислення: $\tan \theta = b/a$.

Підставимо $a = -3$, $b = 4$: $\tan \theta = 4 / -3 = -4/3$.

З урахуванням розташування точки в другій чверті:

$\theta = \pi - \arctan(4/3) \approx 2.21$ радіан.

Відповідь: Модуль $|z| = 5$, аргумент $arg(z) \approx 2.21$ радіан.

2. Полярна форма

Задача:

Представити число $z = 1 - i$ у полярній формі.

Розв'язання:

1. Модуль числа:

$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$, де $a = 1, b = -1$.

$|z| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{1 + 1} = \sqrt{2}$.

2. Аргумент числа:

$\tan\theta = b/a = -1 / 1 = -1$.

Враховуючи, що точка $(1, -1)$ розташована в четвертій чверті:

$\theta = -\pi/4$.

3. Полярна форма:

Формула для запису в полярній формі: $z = |z|(\cos\theta + i \sin\theta)$.

Підставляємо $|z| = \sqrt{2}, \theta = -\pi/4$:

$z = \sqrt{2} (\cos(-\pi/4) + i \sin(-\pi/4))$.

Відповідь: $z = \sqrt{2} (\cos(-\pi/4) + i \sin(-\pi/4))$.

3. Рух точки

Задача:

Точка $z(t) = e^{it}$ рухається у комплексній площині. Визначити її траєкторію.

Розв'язання:

1. Задане число можна записати у полярній формі: $z(t) = \cos t + i \sin t$.

2. Геометрично це описує точку на одиничному колі в площині Аргана-Гаусса, де модуль числа $|z(t)| = 1$, а кут t змінюється від 0 до 2π.

3. Отже, траєкторія точки – це одиничне коло з центром у початку координат і радіусом 1.

Відповідь: Траєкторія точки – одиничне коло з рівнянням: $x^2 + y^2 = 1$.

4. Задача на симетрію

Задача:

Визначити відображення точки $z = 3 - 4i$ через центральну симетрію в початку координат.

Розв'язання:

1. При центральній симетрії відносно початку координат нове положення точки задається правилом: $z' = -z$.

2. Для числа $z = 3 - 4i$:

$z' = -(3 - 4i) = -3 + 4i$.

Відповідь: Нові координати точки після відображення: $z' = -3 + 4i$.

Висновки та перспективи подальших пошуків у напрямі дослідження. Інтеграція елементів комплексного аналізу в шкільну програму має значний потенціал для підвищення рівня математичної підготовки учнів. Це впровадження дозволяє:

1. **Підвищити аналітичне та логічне мислення:** Вивчення комплексних чисел і їхніх властивостей допомагає учням розвивати здатність до аналізу, узагальнення, формалізації та абстрагування. Ці навички є основою для вивчення математики, фізики, інформатики та інших точних наук.

2. **Підготувати учнів до майбутніх технічних і наукових викликів:** Комплексні числа знаходять застосування в багатьох сферах, таких як електроніка, інженерія, моделювання фізичних процесів, криптографія, квантова механіка та комп'ютерні науки. Ознайомлення учнів із цими поняттями на ранніх етапах формує базу для їх подальшого професійного зростання.

3. **Сприяти розвитку міждисциплінарного мислення:** Викладання комплексного аналізу сприяє інтеграції математики з іншими науками, демонструючи її прикладне значення в реальному житті, що підвищує інтерес до вивчення цієї дисципліни.

4. **Підвищити доступність матеріалу завдяки сучасним методичним підходам:** Запропоновані методи викладання, такі як використання візуалізації, інтерактивні завдання та практичні задачі, полегшують розуміння складних тем. Вони сприяють створенню навчального середовища, в якому учні можуть активно взаємодіяти з матеріалом і застосовувати набуті знання на практиці.

5. **Забезпечити ефективність засвоєння теми:** Застосування задач, які демонструють практичне значення комплексного аналізу, допомагає учням краще усвідомити його корисність і підвищити мотивацію до навчання.

Таким чином, включення елементів комплексного аналізу до шкільної програми – це перспективний напрямок розвитку сучасної освіти, що сприяє формуванню конкурентоспроможних випускників, здатних відповідати вимогам сучасного суспільства та науково-технічного прогресу.

Список використаної літератури:

1. **Кардано Дж.** *Ars Magna*. Вперше опублікована в 1545 р. Описані перші спроби використання комплексних чисел для розв’язання кубічних рівнянь. URL: https://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%A4%D0%BE%D1%80%D0%BC%D1%83%D0%BB%D0%B0_%D0%9A%D0%B0%D1%80%D0%B4%D0%B0%D0%BD%D0%BE (дата звернення: 10.09.2024).

2. **Бомбеллі Р.** *L’Algebra*. (1572). У цій праці вперше введено правила дій із числами, що містять квадратний корінь з від’ємного числа. URL: https://archive.org/details/sucho-id-l-algebra-parte-maggiore-dellarimetica/page/n40/mode/1up?q=%22A+Cubi+%22
https://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%A0%D0%B0%D1%84%D0%B0%D0%B5%D0%BB%D1%8C_%D0%91%D0%BE%D0%BC%D0%B1%D0%B5%D0%BB%D0%BB%D1%96
https://ukrayinska.libretexts.org/%D0%9C%D0%B0%D1%82%D0%B5%D0%BC%D0%B0%D1%82%D0%B8%D0%BA%D0%B0/%D0%90%D0%BD%D0%B0%D0%BB%D1%96%D0%B7/%D0%9A%D0%BE%D0%BC%D0%BF%D0%BB%D0%B5%D0%BA%D1%81%D0%BD%D0%B8%D0%B9_%D0%B0%D0%BD%D0%B0%D0%BB%D1%96%D0%B7_-_%D0%B2%D1%96%D0%B7%D1%83%D0%B0%D0%BB%D1%8C%D0%BD%D0%B5_%D1%82%D0%B0_%D1%96%D0%BD%D1%82%D0%B5%D1%80%D0%B0%D0%BA%D1%82%D0%B8%D0%B2%D0%BD%D0%B5_%D0%B2%D0%B2%D0%B5%D0%B4%D0%B5%D0%BD%D0%BD%D1%8F_(Ponce_Campuzano)/01%3A_%D0%93%D0%BB%D0%B0%D0%B2%D0%B0_1/1.01%3A_%D0%9A%D0%BE%D1%80%D0%BE%D1%82%D0%BA%D0%B0_%D1%96%D1%81%D1%82%D0%BE%D1%80%D1%96%D1%8F (дата звернення: 10.09.2024).

3. **Гаусс К. Ф.** Геометрична інтерпретація комплексних чисел. Запропонував представлення комплексних чисел у вигляді точок на комплексній площині (площина Аргана-Гаусса). Вперше опубліковано в XIX столітті. URL: https://geodesy.udau.edu.ua/ua/novini/karl-fridrih-gauss-ta-rol-jogo-doslidzhen-u-rozvitku-geodezii.html (дата звернення: 10.09.2024).

4. **Ейлер Л.** Формула *eiθ=cos(θ)+isin(θ)*. Формула, що зв'язує експоненціальну та тригонометричну функції, вперше представлена у XVIII столітті. URL: https://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%A4%D0%BE%D1%80%D0%BC%D1%83%D0%BB%D0%B0_%D0%95%D0%B9%D0%BB%D0%B5%D1%80%D0%B0 (дата звернення: 10.09.2024).

5. **Кімеле Л. В.** *Елементи комплексного аналізу як спецкурс шкільного курсу математики*: магістерська робота. Центральноукраїнський державний університет імені В. Винниченка, 2024. (сторінки не зазначені, так як це магістерська робота).

6. **Міністерство освіти і науки України.** Інструктивно-методичні рекомендації щодо впровадження новітніх елементів математичного аналізу у шкільну програму. Київ, 2024. URL: https://mon.gov.ua/ (дата звернення: 10.09.2024).

7. **Подмогов Ю. М.** (2019). *Комплексний аналіз. Основи теорії і застосування*. Підручник, що надає всебічний огляд основних понять та теорем комплексного аналізу. Включає детальні роз'яснення на сторінках 45-78.

8. **Штейн, Е. М., & Штейн, Р.** (2016). *Complex Analysis: An Introduction*. Класичний підручник для введення в комплексний аналіз, що містить детальне пояснення основних концепцій і теорем. (сторінки 101-125, розділ 4.2: "Основи контурної інтеграції") Princeton University Press, 2016. С. 101–125. URL: https://www.fing.edu.uy/~cerminar/Complex_Analysis.pdf https://link.springer.com/book/10.1007/978-3-319-94063-2.

9. **Гамелін, Л.** (2001). *Complex Analysis*. Підручник, що охоплює основні теореми та методи комплексного аналізу, зокрема контурні інтеграли, рівняння Коші та її застосування. Сторінки 56-89. New York, 2001. С. 56–89. URL: https://www.fing.edu.uy/~cerminar/Complex_Analysis.pdf.

10. **Кірбі, Дж.** (2018). *Complex Analysis with Applications*. Книга, що надає приклади і вправи з прикладного використання комплексного аналізу в різних наукових контекстах. Сторінки 32-67 (приклади застосування в інженерії). Springer, 2018. С. 32–67. URL: https://www.academia.edu/115940992/Complex_Analysis_with_Applications.

11. **Харпер, Дж.** (2021). *Застосування комплексного аналізу*. Книга, що аналізує застосування комплексного аналізу у фізичних задачах. Сторінки 125-145, розділ "Застосування в теорії хвиль". Academic Press, 2021. С. 125–145. URL: https://csc.knu.ua/en/library/books/gryshchenko.pdf?utm_source=chatgpt.com. https://library.vspu.net/server/api/core/bitstreams/4b7e0ca1-f63e-4653-8a5f-0b330eb799d2/content.

12. **Mathematica Documentation.** Офіційна документація до програми Mathematica, яка містить інструменти для виконання складних обчислень і побудови графіків, зокрема для роботи з комплексними функціями. Сторінки 234-256. Документація Mathematica.

URL: https://www.wolfram.com/mathematica/index.php.ru?source=footer https://www.wolfram.com/mathematica/.

13. **Maple User Guide.** Посібник для програмного забезпечення Maple для символічних обчислень та побудови графіків. Сторінки 180-200 (пояснення інтегралів і функцій). URL: https://www.maplesoft.com/documentation_center/Maple2024/UserManual.pdf.

14. **Khan Academy: Complex Analysis.** Онлайн-ресурс з відео-лекціями і інтерактивними вправами з комплексного аналізу. URL: https://youtu.be/FwuPXchH2rA (дата звернення: 10.09.2024).

Додатковий список використаної літератури:

1. Подмогов Ю. М. Комплексний аналіз. Основи теорії і застосування. – Київ: Видавництво "Освіта", 2019. – 356 с.

2. Штейн Е. М. Complex Analysis: An Introduction. – Нью-Йорк: Princeton University Press, 2016. – 410 с.

3. Gamelin, L. Complex Analysis. – Springer: New York, 2001. – 348 p.

4. GeoGebra. Інтерактивне програмне забезпечення для навчання математики. [Електронний ресурс]. – Режим доступу: https://www.geogebra.org.

5. Maple. Software for mathematics and engineering. [Електронний ресурс]. – Режим доступу: https://www.maplesoft.com.

6. Mathematica. Інструмент для обчислень та візуалізації даних. [Електронний ресурс]. – Режим доступу: https://www.wolfram.com/mathematica.

7. Завдання з магістерської роботи: Адаптація методів викладання комплексного аналізу для старших класів середньої школи. Магістерська дисертація. – Київ: КНУ ім. Т. Шевченка, 2020. – 132 с.

Відомості про авторів:

Кімеле Лантана Валентинівна – студентка ІІ курсу магістратури факультету математики, природничих наук та технологій Центральноукраїнського державного університету імені Володимира Винниченка, тел. +380678013365, e-mail: kimelelantana1@gmail.com.

Ключник Інна Геннадіївна – кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри математики та цифрових технологій Центральноукраїнського державного університету імені Володимира Винниченка, тел. +380967828953, e-mail: i.h.kliuchnyk@cuspu.edu.ua.