

## РОЗРОБКА І РЕАЛІЗАЦІЯ ЗАДАЧ З ГЕОМЕТРИЧНИМИ МОДЕЛЯМИ ПІД ЧАС ВИВЧЕННЯ ТЕМИ «ЧИСЛОВІ ПОСЛІДОВНОСТІ»

**Пожар Вікторія**

**Науковий керівник: канд. техн. наук, професор Корольський В.В.**

*Криворізький державний педагогічний університет, м. Кривий Ріг, Україна*

*У статті досліджується використання геометричних моделей для розробки задач з теми «Числові послідовності». Представлено приклади побудови таких моделей як квадрат з параметром  $a=1$  вписано послідовності точок  $\{Q_n\}$ ,  $\{t_n\}$ ,  $\{i_n\}$ ,  $\{P_n\}$ ,  $\{j_n\}$ ,  $\{S_n\}$ ,  $\{m_n\}$ . Координати цих точок визначаються шляхом використанням точок  $a_n, b_n, c_n, d_n, e_n, f_n, l_n, k_n$  які розташовані на сторонах квадрату  $OABC$  за законом послідовностей  $\{1/(n+1)\}$  і  $\{n/(n+1)\}$ . Представлені результати виконаних досліджень можуть бути рекомендовані для створення задач, пов'язаних з вивченням теми «Числові послідовності» для учнів ліцею, а також у процесі навчання студентів фізико-математичних факультетів педагогічних університетів.*

**Ключові слова:** *числові послідовності, геометрична модель, задачі різних рівнів складності, координати точок.*

### **Development and implementation of tasks with geometric models in the study of the topic "Numerical Sequences"**

**V. Pozhar**

**Scientific supervisor: Candidate of technical sciences, Professor Korolskyi V.V.**

*Kryvyi Rih State Pedagogical University, Kryvyi Rih, Ukraine*

*The article examines the use of geometric models for the development of tasks on the topic "Numerical Sequences." Examples of constructing such models are presented, including a square with a parameter  $a=1$  in which the sequences of points  $\{Q_n\}$ ,  $\{t_n\}$ ,  $\{i_n\}$ ,  $\{P_n\}$ ,  $\{j_n\}$ ,  $\{S_n\}$ ,  $\{m_n\}$  are inscribed. The coordinates of these points are determined using points  $a_n, b_n, c_n, d_n, e_n, f_n, l_n, k_n$ , which are located on the sides of the square  $OABC$  according to the laws of the sequences  $\left\{\frac{1}{n+1}\right\}$  і  $\left\{\frac{n}{n+1}\right\}$ . The results of the study can be recommended for creating tasks related to the study of the topic "Numerical Sequences" for high school students, as well as in the educational process of students at the physics and mathematics faculties of pedagogical universities.*

**Keywords:** *numerical sequences, geometric model, tasks of different difficulty levels, point coordinates.*

**Постановка проблеми.** Досить часто у процесі вивчення теми «Числові послідовності», як у старшокласників під час підготовки до олімпіад, так і у студентів фізико-математичних факультетів, виникають труднощі із розумінням закономірностей побудови послідовностей, визначенням координат точок у геометричних моделях, а також із засвоєнням способів аналізу властивостей послідовностей. Для подолання цих труднощів доцільно використовувати геометричні моделі, які дозволяють візуалізувати числові послідовності, їхні взаємозв'язки та особливості. Такий підхід сприяє розвитку просторового мислення та забезпечує краще засвоєння основних понять теми. Дослідженнями числових послідовностей і їх геометричних інтерпретацій займались багато вчених, зокрема в контексті математичного аналізу. У сучасних задачниках для учнів ліцеїв і студентів вищих навчальних закладів числові послідовності та їх властивості часто розглядаються без зв'язку з реальними умовами, що обмежує їх застосування в практичних задачах. Формальний характер завдань не дозволяє повною мірою зрозуміти сутність числових послідовностей, їхній зв'язок із геометрією, а також практичну значущість у моделюванні.

**Аналіз досліджень і публікацій.** Останнім часом зростає інтерес до використання геометричних моделей для вивчення числових послідовностей. Такі підходи передбачають візуалізацію членів послідовностей через координати точок у просторі, площі трикутників, довжини відрізків або об'єми тіл. Це дозволяє глибше зрозуміти властивості числових послідовностей і підходи до їх аналізу. Результати подібних досліджень широко представлені у працях таких авторів, як В. Бобирь [1], С. Габ [3; 4], Н. Дзигарська [2], В. Корольський [2-10], А. Римар [7], О. Тураєва [2; 8], А. Христюк [1], А. Романова [10]. Вони досліджували зв'язок між класичними числовими послідовностями та їх геометричними інтерпретаціями, включаючи графіки функцій і параметричні моделі. Однак на нашу думку, подальше дослідження геометричних моделей із застосуванням точок, вписаних у квадрат, є перспективним напрямком. Такий підхід може бути використаний для розробки

завдань різного рівня складності, які не лише сприяють глибокому засвоєнню математичних понять, а й розвивають просторове мислення.

**Мета статті.** Метою дослідження є розробка та дослідження геометричних моделей, які базуються на числових послідовностях, зокрема за законами  $\left\{\frac{1}{n+1}\right\}$  і  $\left\{\frac{n}{n+1}\right\}$ , для створення системи задач різного рівня складності. Передбачено побудову моделей у вигляді вписаних у квадрат послідовностей точок  $\{Q_n\}$ ,  $\{t_n\}$ ,  $\{i_n\}$ ,  $\{P_n\}$ ,  $\{J_n\}$ ,  $\{S_n\}$ ,  $\{m_n\}$ , координати яких визначаються через точки на сторонах квадрата.

Результати роботи спрямовані на формування завдань, які можна застосовувати під час вивчення теми «Числові послідовності» у ліцєях та у процесі навчання студентів педагогічних університетів. Ці завдання сприяють розвитку просторового мислення та кращому розумінню математичних понять, а також є основою для подальших досліджень у сфері візуалізації та моделювання числових послідовностей.

**Виклад основного матеріалу (результатів) дослідження.** Розглянемо геометричну модель на рис.1:

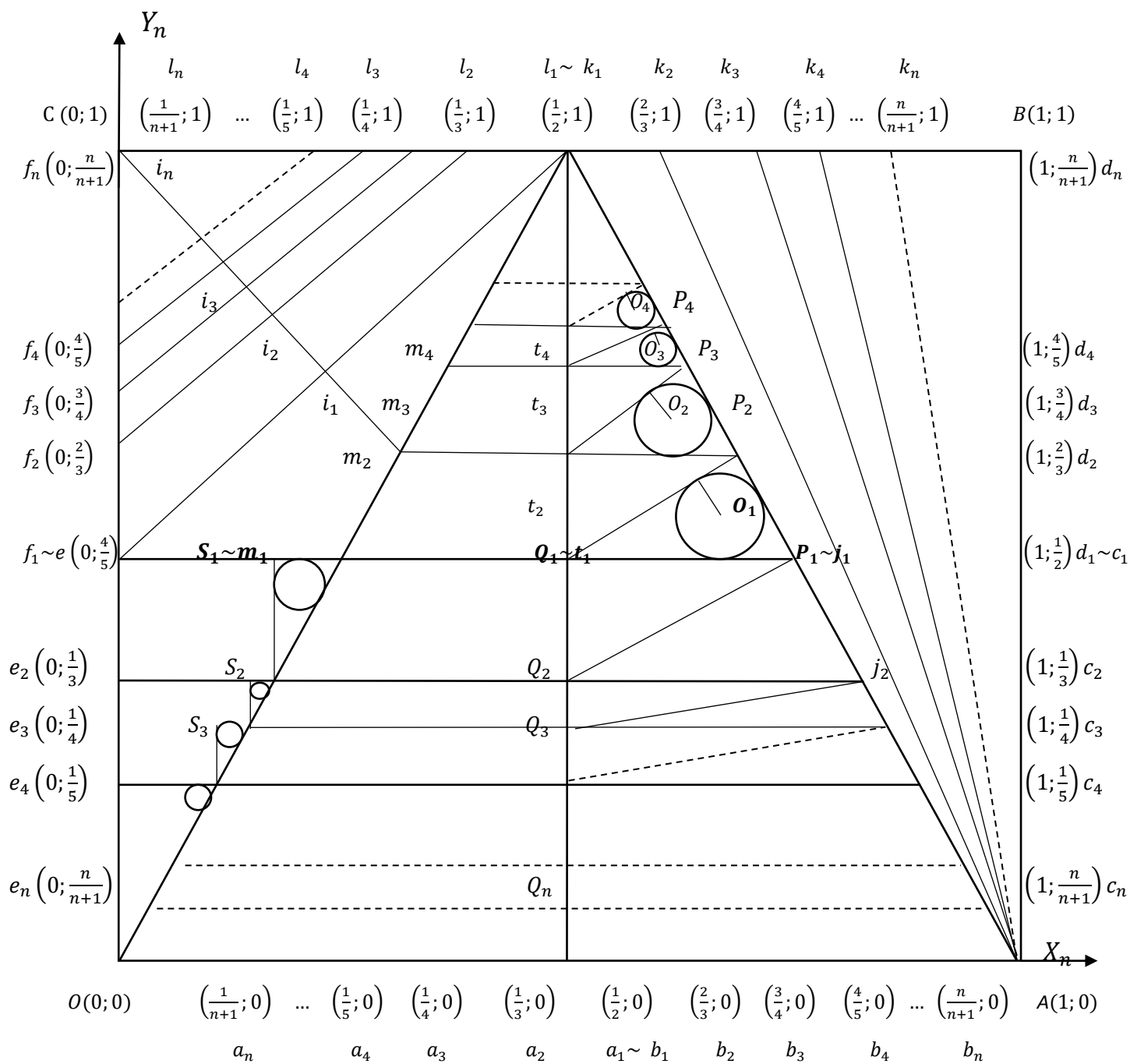


Рис.1 У квадрат з параметром  $a = 1$  вписано послідовності точок  $\{Q_n\}, \{t_n\}, \{i_n\}, \{P_n\}, \{j_n\}, \{S_n\}, \{m_n\}$ . Координати цих точок визначаються шляхом використанням точок  $a_n, b_n, c_n, d_n, e_n, f_n, l_n, k_n$  які розташовані на сторонах квадрату  $OABC$  за законом послідовностей  $\left\{ \frac{1}{n+1} \right\}$  і  $\left\{ \frac{n}{n+1} \right\}$

Розглянемо декілька задач точкової, лінійної, квадратурної і кубатурної геометричної інтерпретації.

**Задача 1.** Скласти послідовність абсцис точок  $P_n$

*Розв'язання*

Щоб визначити послідовність координат даної точки, проаналізуємо рисунок 1. З рисунку видно, що точки  $P_1 P_2 P_3 \dots P_n$  знаходяться на діагоналі квадрата, тоді абсциса і ордината цих точок будуть рівні:  $P_1 \left(\frac{1}{2}; 1\right) P_0(1; 0)$

$$\frac{x - \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{y - 1}{0 - 1}$$

$$\frac{1}{2} - x = \frac{1}{2}y - \frac{1}{2} \mid \cdot 2$$

$$1 - 2x = y - 1$$

$y = -2x + 2$  – пряма точок  $P_n$

$$P_1: y = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2} = -2x + 2 \text{ таким чином } x = \frac{3}{4};$$

$$P_2: y = \frac{2}{3} \quad \Rightarrow \quad \frac{2}{3} = -2x + 2 \text{ таким чином } x = \frac{2}{3};$$

$$P_3: y = \frac{3}{4} \quad \Rightarrow \quad \frac{3}{4} = -2x + 2 \text{ таким чином } x = \frac{5}{8}.$$

$$\frac{3}{4}; \frac{4}{5}; \frac{5}{8} \dots \Rightarrow \frac{n+2}{2n+2}$$

Відповідь:  $P_{n_x} = \frac{n+2}{2n+2}$ .

**Задача 2.** Скласти послідовність величин послідовності відрізків  $\{\overline{l_n l_n}\}_{n=1}^{\infty}$

*Розв'язання*

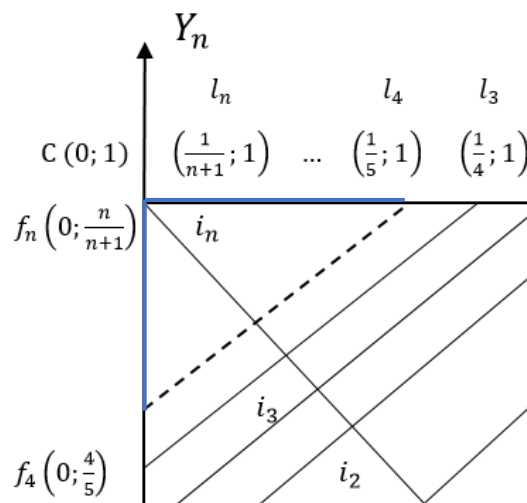


Рис. 2 Фрагмент геометричної моделі з параметром  $a = 1$  вписано послідовності точок  $\{Q_n\}, \{t_n\}, \{i_n\}, \{P_n\}, \{J_n\}, \{S_n\}, \{m_n\}$

$1 - \frac{n}{n+1} = \frac{1}{n+1}$  тому сині відрізки рівні. Отже  $f_n l_n = 2i_n l_n = \frac{\sqrt{2}}{n+1}$

$$[\overline{l_n l_n}] = \frac{1}{\sqrt{2}(n+1)}$$

Відповідь:  $[\overline{l_n l_n}] = \frac{1}{\sqrt{2}(n+1)}$

**Задача 3.** Скласти послідовність величин площ послідовності трикутників  $\{\Delta AK_n K_{n-1}\}_{n=1}^{\infty}$ .

*Розв'язання*

Обчислимо площу трикутника за допомогою формули площі трикутника

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2} a h_a$$

Сторона квадрата і  $h_a = 1$ ,  $a = K_{n+1x} - K_{nx}$

$$K_{nx} = \frac{n}{n+1} \rightarrow a = \frac{n+1}{n+2} - \frac{n}{n+1} = \frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

$$S_n = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(n+1)(n+2)} \cdot 1 = \frac{1}{2(n+1)(n+2)}$$

Відповідь:  $\frac{1}{2(n+1)(n+2)}$

**Задача 4.** Скласти послідовність величин об'ємів послідовності тіл обертання, що створюються обертанням навколо осі ОХ послідовності прямих  $\{\overline{Q_{n+1}J_n}\}_{n=1}^{\infty}$ .

*Розв'язання*

При обертанні  $Q_{n+1}J_n$  довкола осі Ох буде утворюватися зрізаний конус. Об'єм зрізаного конуса розраховується за формулою:

$$V = \pi \int_a^b (f(x))^2 dx$$

$$f(x): \frac{x - \frac{1}{2}}{\frac{2n+1}{2(n+1)} - \frac{1}{2}} = \frac{y - \frac{1}{2}}{\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}}$$

$$\frac{2x-1}{n} = y(n+1) - 1 \qquad y = \frac{2x + (n-1)}{n+2}$$

$$V = \pi \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{2n+1}{2n+2}} \left( \frac{2x + (n-1)}{n+2} \right)^2 dx =$$

$$= \frac{\pi}{(n+2)^2} \left( \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{2n+1}{2n+2}} (4x^2 + 4(n-1)x + (n-1)^2) dx \right) =$$

$$= \frac{\pi}{(n+2)^2} \left( \frac{4}{3}x^3 + 2(n-1)x^2 + (n-1)^2x \right) \Big|_{\frac{1}{2}}^{\frac{2n+1}{2n+2}} = \frac{\pi n^3(3n^2 + 9n + 7)}{6(n+1)^3(n+2)^2}$$

Відповідь:  $\frac{\pi n^3(3n^2+9n+7)}{6(n+1)^3(n+2)^2}$ .

Можливості використання розглянутої геометричної моделі (рис. 1) для створення задач на числові послідовності не вичерпуються розглянутими задачами 1-4. Наприклад, модель можна доповнити:

I. Задачі точкової геометричної інтерпретації

1. Скласти послідовність абсцис точок  $m_n$
2. Скласти послідовність ординат точок  $m_n$
3. Скласти послідовність абсцис точок  $S_n$
4. Скласти послідовність ординат точок  $S_n$

II. Задачі лінійної геометричної інтерпретації.

1. Скласти послідовність величин послідовності відрізків  $\{|\overline{a_n a_{n+1}}|\}_{n=1}^{\infty}$
2. Скласти послідовність величин послідовності відрізків  $\{|\overline{b_n b_{n+1}}|\}_{n=1}^{\infty}$
3. Скласти послідовність величин послідовності відрізків  $\{|\overline{AK_n}|\}_{n=1}^{\infty}$
4. Скласти послідовність величин послідовності відрізків  $\{|\overline{P_n P_{n+1}}|\}_{n=1}^{\infty}$

III. Задачі квадратурної геометричної інтерпретації.

1. Скласти послідовність величин площ послідовності трикутників  $\{\Delta AK_n K_{n-1}\}_{n=1}^{\infty}$
2. Скласти послідовність величин площ послідовності трикутників  $\{\Delta t_n P_n P_{n-1}\}_{n=1}^{\infty}$
3. Скласти послідовність величин площ послідовності трикутників  $\{\Delta Q_{n+1} j_n j_{n+1}\}_{n=1}^{\infty}$
4. Скласти послідовність величин площ послідовності трикутників  $\{\Delta C f_n i_n\}_{n=1}^{\infty}$

IV. Задачі кубатурної геометричної інтерпретації.

1. Скласти послідовність величин об'ємів послідовності тіл обертання, що створюються обертанням навколо осі OX послідовності прямих  $\{\overline{Q_n J_n}\}_{n=1}^{\infty}$

2. Скласти послідовність величин об'ємів послідовності тіл обертання, що створюються обертанням навколо осі ОХ послідовності прямих  $\{\overline{Q_{n+1}J_n}\}_{n=1}^{\infty}$
3. Скласти послідовність величин об'ємів послідовності тіл обертання, що створюються обертанням навколо осі ОХ послідовності прямих  $\{\overline{AK_n}\}_{n=1}^{\infty}$
4. Скласти послідовність величин об'ємів послідовності тіл обертання, що створюються обертанням навколо осі ОХ послідовності прямих  $\{\overline{f_n l_n}\}_{n=1}^{\infty}$

### **Висновки та перспективи подальших пошуків у напрямі дослідження.**

Дослідження у сфері створення та аналізу числових послідовностей, побудованих на основі геометричних моделей із використанням вписаних у квадрат точок  $\{Q_n\}$ ,  $\{t_n\}$ ,  $\{i_n\}$ ,  $\{P_n\}$ ,  $\{J_n\}$ ,  $\{S_n\}$ ,  $\{m_n\}$ , відкривають нові можливості для розробки систем задач. Такий підхід сприяє глибшому розумінню теми «Числові послідовності», зокрема через візуалізацію, що забезпечує поєднання теоретичних знань із практичним використанням.

Результати дослідження можуть бути використані для удосконалення методик навчання у ліцєях і педагогічних університетах, а також для розробки завдань олімпіадного рівня. Подальші пошуки у цьому напрямі можуть включати адаптацію представлених моделей до інших розділів математики, а також дослідження їхнього впливу на розвиток просторового мислення та аналітичних здібностей студентів.

### **Список використаної літератури**

1. Бобирь В. Д., Христюк А. М. (2019). Реалізація дидактичного принципу наочності при вивченні числових рядів. X Міжнародна конференція молодих вчених «Молоді вчені 2019 – від теорії до практики» (7 березня 2019 р., Дніпро). (Bobyry V. D., Hrystyuk A. M. (2019). Implementation of the didactic principle of visibility in the study of number series. 10th International Conference of Young Scientists "Young Scientists 2019 – from Theory to Practice" (Mar. 7, 2019, Dnipro). Dnipro.
2. Дзигарська Н. С., Корольський В. В., Тураєва О. В. (2022). Генерація числових рядів з використанням послідовностей геометричних об'єктів, вписаних у квадрат з параметром в



системі координат . Наукові записки молодих учених № 10. (Dzyharska N. S., Korolskiy V. V., Turaieva O. V. (2022). Generation of numerical series using sequences of geometric objects inscribed in a square with parameter in the coordinate system. Scientific notes of young scientists № 10).

3. Корольський В. В., Габ С. С. (2018). Лінійна, квадратурна та куботурна геометрична інтерпретація числових рядів засобами моделювання. Новітні комп'ютерні технології: науково-методичний збірник. Том XVI. Кривий Ріг (сс. 67-73). (Korolskiy V. V., Gab S. S. (2018). Linear, quadrature and cuboidal geometric interpretation of numerical series by means of modeling. Latest computer technologies: scientific and methodical collection Volume XVI. Kryvyi Rih (pp. 67- 73)).

4. Корольський В. В. Габ С. С. (2018). Числові ряди, які пов'язані з параметрами додекаедра. Вісник міжнародного дослідницького центру «Людина: мова, культура, пізнання»: науковий журнал, В. В. Корольський (ред.). Том 42. Кривий Ріг (сс. 39-45). (Korolskiy V. V., Gab S. S. (2018). Numerical series related to the parameters of the dodecahedron. Bulletin of the International Research Center "Man: Language, Culture, Cognition": scientific journal, V. V. Korolskiy (Ed.). Volume 42. Kryvyi Rih (pp. 39-45)).

5. Корольський В. В. (2017). Геометрична інтерпретація числових рядів. Новітні комп'ютерні технології: науково-методичний збірник. Том XV. Кривий Ріг (сс. 57-63). (Korolskiy V. V. (2017). Geometric interpretation of numerical series. Latest computer technologies: scientific and methodical collection Volume XV. Kryvyi Rih (pp. 57-63)).

6. Корольський В. В. (2018). Геометрична інтерпретація числового ряду арифметичної прогресії. Новітні комп'ютерні технології: науково-методичний збірник. Том XVI. Кривий Ріг (сс. 59-66). (Korolskiy V. V. (2018). Geometric interpretation of a numerical series of arithmetic progression. Latest computer technologies: scientific and methodical collection Volume XVI. Kryvyi Rih (pp. 59- 66)).

7. Корольський В. В., Римар А. І. (2022). Геометрична інтерпретація числових рядів, пов'язаних з державною символікою. Збірник наукових праць «Актуальні питання природничо-математичної освіти». Випуск 2(20) (сс. 29- 38). (Korolskiy V. V., Rymar A. I. (2022) Geometric interpretation of numerical series associated with state symbols. Collection of scientific works «Topical issues of natural science and mathematics education». Issue 2(20) (pp. 29-38)).

8. Сьомкіна К. Створення задач, пов'язаних з числовими послідовностями і рядами за допомогою геометричної моделі з використанням графіків функцій / Наук. керівник: канд. техн. наук, проф. Корольський В.В. – Криворізький державний педагогічний університет, м. Кривий Ріг, Україна.

9. Корольський В. В., Тураєва О. В. (2023). Генерація та дослідження числових рядів за допомогою геометричної моделі та комбінації рядів  $\sum$  і  $\sum$ . Збірник наукових праць «Актуальні питання природничоматематичної освіти». Випуск 1 (21) (с. 46-54). (Korolskiy V. V., Turaieva O. V. (2023) Generation and investigation of number series using geometric model and combination of series  $\sum$  and  $\sum$ . Collection of scientific works «Topical issues of natural science and mathematics education». Issue 1 (21) (pp. 46-54)).

10. Корольський В. В., Шокалюк С. В., Мельниченко Ю. А. (2018). Теоретико-методичні засади геометричного моделювання числових рядів. Фізико-математична освіта. Випуск 4(18) (с. 81-89). (Korolskiy V. V., Shokaluk S. V., Melnychenko Y. A. (2018). Theoretical and methodological foundations of geometric modeling of numerical series. Physical and mathematical education. Issue 4(18) (pp. 81-89)).

11. Романова А. М. Генерація числових рядів та дослідження їх на збіжність: кваліфікаційна робота ступеня вищої освіти магістр, спеціальності 014.04 Середня освіта (Математика) / А. М. Романова: наук. керівник В. В. Корольський. – Кривий Ріг, 2019. – 90 с.

#### **Відомості про автора:**

Пожар Вікторія Вікторівна – студентка II курсу магістратури фізико-математичного факультету, Криворізького державного педагогічного університету, тел. +380 68 32 60 740, e-mail: victoriapozhar@gmail.com