УДК 514.112.4(045)

ОСОБЛИВОСТІ ГРАНИЧНОГО ПЕРЕХОДУ В ЗАВДАННЯХ З БАГАТОКУТНИКАМИ

Бондаренко Артем

Науковий керівник: канд.пед. наук, доцент Босовський М.В.

Черкаський національний університет імені Богдана Хмельницького, м. Черкаси, Україна

Граничний перехід в геометричних задачах є потужним інструментом для аналізу багатокутників, особливо під час переходу від дискретних до неперервних форм. У дослідженні розглядається, як цей підхід може бути інтегрований у шкільну геометрію, зокрема для аналізу площі та периметра багатокутників у граничному випадку. На прикладі правильного багатокутника, вписаного в коло, демонструється наближення його площі та периметра до площі й довжини кола. Отримані результати свідчать про точність апроксимації, що має практичне значення для моделювання складних форм. Пропонуються інтерактивні завдання для учнів, які допоможуть зрозуміти взаємозв'язок між дискретними та неперервними об'єктами й сприятимуть розвитку аналітичного мислення.

Ключові слова: *аналіз багатокутників, граничний перехід, геометрія, апроксимація, математичне моделювання, аналітичне мислення, неперервні форми.*

Features of the limit transition in problems with polygons

A. Bondarenko

Scientific Supervisor: Candidate of Pedagogical Sciences, Associate Professor Bosovskyi M.V.

The Bohdan Khmelnytsky National University of Cherkasy, Cherkasy, Ukraine

The limit transition in geometric problems is a powerful tool for analyzing polygons, particularly when transitioning from discrete to continuous forms. The study explores how this approach can be integrated into school geometry, specifically for analyzing the area and perimeter of polygons in the limiting case. The example of a regular polygon inscribed in a circle demonstrates the approximation of its area and perimeter to the area and circumference of the circle. The obtained results highlight the accuracy of the approximation, which has practical significance for modeling complex shapes. Interactive tasks are proposed for students to help them understand the relationship between discrete and continuous objects and to foster the development of analytical thinking.

Key words: *polygon analysis, limit transition, geometry, approximation, mathematical modeling, analytical thinking, continuous forms.*

Постановка проблеми. Багатокутники є фундаментальними об'єктами геометрії, які знаходять застосування як у теоретичній математиці, так і в прикладних науках: фізиці, архітектурі, комп'ютерній графіці, інженерії тощо. Однак у традиційних навчальних програмах їхнє вивчення здебільшого зводиться до статичного аналізу — обчислення площі, периметра та внутрішніх і зовнішніх кутів. Це обмежує можливості учнів у розумінні динамічних змін багатокутників і їхнього переходу до складніших форм через граничні переходи. Водночас у багатьох прикладних задачах багатокутники розглядаються як динамічні об'єкти, здатні наближуватися до кривих або поверхонь. Наприклад, у комп'ютерній графіці вони використовуються для апроксимації криволінійних об'єктів, у фізиці для моделювання хвильових процесів, а в архітектурі — для створення складних структур. Аналіз граничного переходу дозволяє дослідити, як багатокутники змінюються в процесі переходу від дискретної форми до неперервної. Відсутність цього аспекту в шкільній програмі створює прогалину в математичній освіті, що ускладнює формування міждисциплінарного мислення та здатності застосовувати геометричні знання на практиці. Тому інтеграція аналізу граничних переходів у навчальні програми є нагальною необхідністю для розвитку аналітичних навичок учнів.

Аналіз досліджень і публікацій. Аналіз п'яти шкільних підручників з алгебри [1;2;3] та геометрії [4;5] для 9-10 класів свідчить про те, що поняття граничного переходу розглядається переважно в рамках теорії границь функцій, тоді як його застосування до аналізу геометричних об'єктів, таких як багатокутники, залишається поза увагою. У підручниках з алгебри акцент зроблено на теоретичних аспектах границі функцій. Підручники з геометрії зосереджені на вивченні властивостей багатокутників, їхніх площ і периметрів, однак не пропонують конкретних завдань або прикладів, що використовують граничний перехід як інструмент аналізу. Усі ці матеріали створюють передумови для інтуїтивного уявлення динамічні змін багатокутників але формального розкриття цього підходу немає. Додавання до навчальної програми завдань і теоретичних аспектів, що поєднують поняття границі з аналізом багатокутників, покращило б розуміння учнями взаємозв'язку між алгеброю та геометрією.

Мета статті. Метою дослідження є вивчення граничного переходу як інструменту аналізу багатокутників для глибшого розуміння їхніх властивостей та розширення традиційних підходів до їх дослідження. Основна увага приділяється переходу від дискретних до неперервних форм, з акцентом на змінах площі, периметра та структури багатокутників. Дослідження має на меті створення теоретичної бази та методології для інтеграції граничних переходів у освітні програми, що сприятиме вдосконаленню вивчення геометрії та її прикладного використання.

Виклад основного матеріалу (результатів) дослідження. Для загального розуміння способу застосування граничного переходу в правильних багатокутниках спочатку розглянемо конкретний приклад: граничний перехід площі правильного багатокутника до площі круга. Для аналізу використаємо формулу площі багатокутника, вписаного в коло з радіусом R:

$$S_n = \frac{1}{2} n R^2 \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)$$

При збільшені кількості сторін (n) багатокутника, кожна із його сторін стає коротшою, а кути між ними – все меншими. Результатом збільшення n, багатокутник стає неперервною кривою, наближаючи свою форму до круга. Це є класичним прикладом граничного переходу в геометрії. Для великих значень n значення функції $\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)$ може бути апроксимована розкладом Тейлора:

$$\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right) = \frac{2\pi}{n} \text{ при } n \to +\infty$$

Тому площа багатокутника наближається до площі круга:

$$S_n \approx \frac{1}{2} n R^2 \frac{2\pi}{n} \approx \pi R^2$$

Для більш наочного розуміння цього процесу, можна порівняти площу описаного кола зі сталим радіусом та конкретні значення площ багатокутників із різною кількістю сторін. Як видно з Таблиці 1, чим більша кількість сторін, тим ближче площа багатокутника апроксимує до площі круга. При n = 6 різниця між площею багатокутника та круга складає 21%, а вже при n = 96 різниця складає лише 0,08%, що свідчить про високу точність апроксимації та підтверджує правильність математичного моделювання, яке ми використали, для даного прикладу.

Таблиця 1

Площа правильного багатокутника (R = 10 см)

n (кількість сторін)	S_n(площа багатокутника)	S_k (площа описаного круга)	Різниця (%)
6	259,8	314,16	21
12	300	314,16	4,5
24	310,56	314,16	1,14
48	313,2	314,16	0,3
96	313,92	314,16	0,08

Аналогічно, периметр правильного багатокутника визначається:

$$P_n = 2nRsin\left(\frac{\pi}{n}\right)$$

Для великих значеннях n:

$$\sin\left(\frac{\pi}{n}\right) = \frac{\pi}{n} \text{ при } n \to +\infty$$

Тому периметр багатокутника наближається до довжини кола:

$$P_n \approx \frac{2nR\pi}{n} \approx 2\pi R$$

Використовуючи подібний спосіб перевірки апроксимації, як в Таблиці 1, для побудови Таблиці 2 ми можемо спостерігати, що наші узагальнення з приводу наближення периметра є правильними.

Таблиця 2

Периметр правильного багатокутника (R = 10см)

n (кількість сторін)	P_n (периметр багатокутника)	P_k (периметр кола)	Різниця(%)
6	60	62,83	4,5

12	62,12	62,83	1,13
24	62,65	62,83	0,28
48	62,79	62,83	0,06
96	62,82	62,83	0,01

Виродження багатокутників також може мати місце не лише до кола, але й інших форм. Для прикладу, у випадку багатокутників, які наближаються до еліпсів чи спіралей, можна використати подібні принципи для дослідження їх геометричних характеристик.

На відміну від статичного аналізу багатокутників, який фокусується на їхніх конкретних властивостях, вивчення динамічних змін дозволяє побачити, як ці властивості еволюціонують під час граничного переходу. Наприклад, збільшення кількості сторін не лише змінює форму багатокутника, але й приводить до зменшення різниці між його площею та площею круга, в яке він вписаний.

Висновки та перспективи подальших пошуків у напрямі дослідження. Результати досліджень демонструють що багатокутники з великою кількістю сторін можуть точно моделювати об'єкти складної форми. У різних галузях, таких як інженерія, фізика та архітектура, вони використовуються для проектування деталей, аналізу хвильових процесів та створення складних геометричних конструкцій. Це дозволяє вирішувати реальні задачі з високою точністю.

Якщо багатокутники розташовуються не на площині, а на сфері, еліпсоїді або іншій кривій поверхні, їх властивості зазнають суттєвих змін. Зокрема, граничний перехід багатокутника на сфері враховує кривизну поверхні, яка впливає на його площу та периметр. Такі дослідження мають прикладне значення, наприклад, у сферичній геометрії для картографії або в астрофізиці для моделювання планетарних форм.

Для впровадження отриманих результатів у навчальний процес запропоновано інтерактивні завдання, які допомагають учням порівнювати площі багатокутників із площами неперервних форм, наприклад, круга чи еліпса, або моделювати перетворення багатокутників у спіраль за допомогою обчислювальних інструментів. Такі завдання дають змогу краще зрозуміти взаємозв'язок між дискретними й неперервними об'єктами, а також інтегрують знання з різних галузей математики та інформатики. Цей підхід сприяє розвитку аналітичного мислення в учнів і підвищує якість навчання через застосування знань у прикладних задачах. Зв'язок із реальними ситуаціями дозволяє учням глибше зрозуміти важливість математичних методів і їх використання в різних сферах науки та техніки.

Граничний перехід є ефективним інструментом для вивчення геометричних властивостей багатокутників і їх апроксимації до складних форм. Інтеграція цього підходу в освітні програми розширює математичний апарат учнів, сприяє розвитку аналітичного мислення та допомагає у розв'язанні міждисциплінарних задач.

Список використаної літератури:

1. Алгебра і початки аналізу. Профільний рівень : підруч. для 10 кл. закладів загальної середньої освіти / Г. П. Бевз, В. Г. Бевз, Н. Г. Владімірова. — К. : Видавничий дім «Освіта», 2018. — 336 с.
2. Алгебра і початки аналізу : (профіл. рівень) : підруч. для 10-го кл. закл. заг. серед, освіти / О. С. Істер, О. В. Єргіна. — Київ : Генеза, 2018. — 448 с. : іл.
3. Алгебра і початки аналізу : проф. рівень : підруч. для 10 кл. закладів загальної середньої освіти / А. Г. Мерзляк, Д. А. Номіровський, В. Б. Полонський, М. С. Якір. — Х. : Гімназія, 2018. — 400 с. : іл.
4. Геометрія : підруч. для 9 кл. загальноосвіт. навч. закл. / Г. П. Бевз, В. Г. Бевз, Н. Г. Владімірова. — К. : Видавничий дім «Освіта», 2017. — 272 с. : іл.
5. Геометрія : підруч. для 9 кл. загальноосвіт. навч. за кладів / А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонський, М. С. Якір. — Х. : Гімназія, 2017. — 240 с. : іл.

Відомості про автора:

Бондаренко Артем Сергійович – студент III курсу бакалаврату Навчально-наукового інституту інформаційних та освітніх технологій Черкаського національного університету імені Богдана Хмельницького, тел. +380638366725, e-mail: artem.ww3@gmail.com.