

## МЕТОД ЗАМІНИ ЗМІННОЇ ПРИ РОЗВ'ЯЗУВАННІ ІРРАЦІОНАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

**Кривонос Олександра, Войналович Наталія**

**Науковий керівник: канд. пед. наук, доцент Войналович Н.М.**

*Центральноукраїнський державний університет імені Володимира Винниченка,  
м. Кропивницький, Україна*

*В статті розглянуто основні аспекти методики вивчення ірраціональних рівнянь, особлива увага приділена методу заміни змінних. Даний метод є традиційним, але досить складним для учнів. В роботі проаналізовано матеріали підручників з математики стандартного та профільного рівня. Подана розробка системи вправ для ефективного засвоєння методу заміни змінною при розв'язуванні ірраціональних рівнянь учнями.*

***Ключові слова:** метод заміни змінної, ірраціональні рівняння, інформаційні технології, інтерактивні вправи.*

### **Method of replacement of variables in solving irrational equations**

**O. Krivonos, N. Voinalovych**

**Scientific supervisor: Candidate of Pedagogic Science, associate professor Voinalovych N.M.**

*Volodymyr Vynnychenko Central Ukrainian State University,  
Kropyvnytsky, Ukraine*

*The article discusses the main aspects of the method of studying irrational equations, special attention is paid to the method of replacing variables. This method is traditional, but quite difficult for students. The work analyzed the materials of mathematics textbooks of standard and professional level. The development of a system of exercises for effective assimilation of the method of substitution by a variable in solving irrational equations by students is presented.*

***Key words:** variable replacement method, irrational equations, information technologies, interactive exercises.*

**Постановка проблеми.** Зміст шкільного курсу математики групується навколо сукупності змістових ліній, однією з яких є «Рівняння, нерівності та їх системи». Ця лінія охоплює значну частину навчального матеріалу та є основою для розвитку математичних компетентностей учнів. Вивчення тем пов'язаних з рівняннями та нерівностями вимагає від школярів не лише володіння базовими знаннями, але й уміння застосовувати різні методи розв'язання, розуміти логіку алгоритмів і розв'язувати різні типи рівнянь. З усіх типів рівнянь для учнів

одними з найскладніших залишаються ірраціональні рівняння. При розв'язуванні необхідно враховувати область допустимих значень виразів з коренями, уважно виконувати всі перетворення, не забувати про перевірку коренів, а головне не розгубитися при виборі методу розв'язування. Сьогодні старшокласників знайомлять з основними методами: графічний, піднесення обох частин рівняння до одного степеня, рівносильних перетворень та методу заміни змінної. І якщо використовуючи перші три методи учні виконують знайомі їм перетворення виразів з коренями та степенями та будують графіки, то останній є новим і потребує більше уваги при вивченні. Вчитель має не тільки пояснити особливості даного методу, а й допомогти учням навчитися бачити вираз для заміни.

*Аналіз досліджень і публікацій.* В ході вивчення цієї проблеми були досліджені підручники з математики стандартного та профільного рівня для старшої школи. В більшості підручників стандартного рівня представлений метод піднесення обох частин рівняння до одного степеня. Для учнів, які вивчають математику рівня стандарт, метод заміни змінної або взагалі не представлений в темі, або наведений один приклад в теоретичній частині параграфу та декілька номерів з рівняннями, при розв'язуванні яких доцільно використати даний метод. Значно більше уваги цьому методу приділяється в підручниках профільного рівня.

Відповідно до навчальної програми з математики для учнів 10-11 класів загальноосвітніх навчальних закладів з профільним рівнем очікуваними результатами навчально-пізнавальної діяльності учнів при вивченні теми «Степенева функція» є те, що учень/учениця «розв'язує ірраціональні рівняння та нерівності, зокрема з параметрами; застосовує властивості функцій до розв'язування ірраціональних рівнянь і нерівностей». [1]

В підручниках з математики профільного рівня різних авторів значно збільшено обсяг матеріалу для вивчення ірраціональних рівнянь. Помітно більше запропоновано до вивчення методів розв'язання ірраціональних рівнянь, а саме: метод піднесення обох частин до степеня, метод рівносильних перетворень,

графічний метод та метод заміни змінної, а також збільшена кількість прикладів, та завдань, спрямованих на відпрацювання цих методів. Для пояснення кожного методу наводиться більша кількість детально розв'язаних прикладів, що дає змогу учням легше зрозуміти методи. У підручниках акцентується увага на можливості розв'язання одного і того ж рівняння різними способами. Це дозволяє учням зрозуміти, що одне й те саме завдання можна розв'язати різними методами, і сприяє гнучкості мислення.

Відповідно суттєво збільшено кількість вправ і задач на закріплення матеріалу. Завдання поділяються за рівнем складності, що дає змогу врахувати індивідуальні особливості учнів і поступово нарощувати рівень складності.

**Метою** дослідження стала розробка та обґрунтування ефективних методичних підходів до вивчення методу заміни змінної при розв'язуванні ірраціональних рівнянь.

**Виклад основного матеріалу (результатів) дослідження.** Метод заміни змінної є одним із основних способів розв'язання ірраціональних рівнянь. Він полягає в тому, що складні чи повторювані вирази під коренем замінюють новою змінною. Після цього рівняння за допомогою перетворень зводиться до простішого ірраціонального або й раціонального, яке розв'язується стандартними методами. Далі, після розв'язання, слід повернутися до початкової змінної щоб отримати кінцевий результат.

Основні кроки методу заміни змінної:

1. Вводимо нову змінну. Вибираємо нову змінну, яка буде дорівнювати підкореневому виразу

$$\sqrt{x+5} - 3\sqrt[4]{x+5} + 2 = 0$$

$$t = \sqrt[4]{x+5}, t^2 = \sqrt{x+5}$$

2. Підставляємо нову змінну в рівняння. Рівняння переписується з новою змінною, що спрощує структуру і робить його простішим.

$$t^2 - 3t + 2 = 0$$

3. Розв'язуємо отримане рівняння. Отримане рівняння розв'язується відносно нової змінної.

Розв'язавши це рівняння за допомогою формули дискримінанту знаходимо, що  $t = 1$ ,  $t = 2$ .

4. Повертаємося до початкової змінної. Після розв'язання рівняння для нової змінної, підставляємо вираз для цієї змінної назад, щоб знайти корені для початкової змінної.

$$\begin{array}{ll} 1 = \sqrt[4]{x+5} & 2 = \sqrt[4]{x+5} \\ 1^4 = (\sqrt[4]{x+5})^4 & 2^4 = (\sqrt[4]{x+5})^4 \\ 1 = x+5 & 16 = x+5 \\ x = -4 & x = 11 \end{array}$$

5. Перевіряємо отримані розв'язки. Важливо перевірити всі знайдені розв'язки, оскільки при піднесенні до квадрату можуть з'являтися сторонні, які не є коренями заданого рівняння.

$$\begin{array}{l} \sqrt{-4+5} - 3\sqrt[4]{-4+5} + 2 = 0 \\ 1 - 3 \cdot 1 + 2 = 0 \\ 0 = 0 \\ \sqrt{-4+5} - 3\sqrt[4]{-4+5} + 2 = 0 \\ 1 - 3 \cdot 1 + 2 = 0 \\ 0 = 0 \end{array}$$

Метод заміни змінної є одним із найефективніших, але водночас і найскладніших методів розв'язування ірраціональних рівнянь. Його складність полягає в тому, що вибір правильної заміни часто є неочевидним. Важливо підібрати таку заміну, яка дозволить позбутися коренів і перетворити рівняння так, щоб його було легше розв'язати. Неправильно обрана заміна може значно ускладнити процес розв'язання або навіть призвести до помилки. Досить поширеною помилкою є зупинка в розв'язанні рівняння на етапі знаходження значення заміни. Тому важливо навчати учнів виконувати всі етапи: правильно

вибрати заміну, розв'язати рівняння з новою змінною, повернутися до зміни, знайти кінцевий розв'язок та перевірки чи буде він коренем рівняння. Такий системний підхід забезпечить не лише розуміння методу, але й точність отриманих результатів.

Інформаційні технології стали важливою складовою навчального процесу у старшій школі. Вони дозволяють зробити навчання більш сучасним, доступним і гнучким, а також відповідають потребам учнів, які вже звикли використовувати технології у повсякденному житті. Тому одним з можливих варіантів організації етапу формування знань та умінь уроку з теми «Ірраціональні рівняння. Метод заміни змінної» може бути зосередженим навколо системи вправ реалізованої за допомогою сервісу LearningApps [3]. Кожна вправа підібрана так, щоб відпрацювати етапи розв'язування ірраціонального рівняння методом заміни змінної.

<b>Вправа 1.</b>	
З'єднати рівняння з його заміною	
Ірраціональні рівняння	Заміна змінної
$\sqrt{x+5} - 4 = 2\sqrt{x+5}$	$t = \sqrt{x+5}$
$\sqrt{x-2} + 18 = \sqrt{4x-8}$	$t = \sqrt{x-2}$
$\sqrt{x^2 + 4x + 5} = x^2 + 4x + 10$	$t = \sqrt{x^2 + 4x + 5}$
$\sqrt[4]{x-13} - \sqrt{x-13} = 0$	$t = \sqrt[4]{x-13}$
<i>В такій вправі ще добре додати декілька додаткових зайвих варіантів.</i>	$t = x - 13$
	$t = \sqrt{x-13}$
	$t = x - 4$
<b>Вправа 2.</b>	
Учень має поєднати етапи алгоритму розв'язування ірраціонального рівняння методом заміни змінної для рівняння	
$\sqrt{x^2 - 5} - 6 = -2\sqrt{x^2 - 5}$	

<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Визначитися із заміною</li> <li>2. Записати рівняння з новою змінною</li> <li>3. Розв'язати отримане рівняння</li> <li>4. Виконати зворотню заміну</li> <li>5. Перевірити отримані розв'язки</li> </ol>	$t = \sqrt{x^2 - 5}$ $t - 6 = -2t$ $t = 2$ $\sqrt{x^2 - 5} = 2$ $x^2 - 5 = 4$ $x^2 = 9$ $x = 3, x = -3$ $\sqrt{3^2 - 5} - 6 = -2\sqrt{3^2 - 5}$ $\sqrt{(-3)^2 - 5} - 6 = -2\sqrt{(-3)^2 - 5}$
---	---

**Вправа 3.**

Заповнити пропуски при розв'язуванні ірраціонального рівняння.

$$\sqrt{5x - 3} + \sqrt{x - 1} = 4$$

$\sqrt{5x - \underline{\quad}} + 2 + \sqrt{x - 1} = 4$ $\sqrt{\underline{\quad}}(x - 1) + 2 + \sqrt{x - 1} = 4$ $t = \underline{\quad}$ $\sqrt{\underline{\quad}} + \sqrt{t} = 4$ $\sqrt{5t + 2} = 4 \underline{\quad} \sqrt{t}$ $5t + 2 = 16 \underline{\quad} + t$ $4t - \underline{\quad} = -8\sqrt{t}$ $2t - 7 = \underline{\quad} \sqrt{t}$ $\underline{\quad} - 28t + 49 = 16t$ $4t^2 - \underline{\quad}t + 49 = 0$ $t = \frac{\underline{\quad}}{2}$ $\frac{11 - 6\sqrt{2}}{2} = \underline{\quad}, \frac{11 - 6\sqrt{2}}{2} = \underline{\quad}$	<p>Пропуск 1. 5</p> <p>Пропуск 2. 5</p> <p>Пропуск 3. <math>x - 1</math></p> <p>Пропуск 4. <math>5t + 2</math></p> <p>Пропуск 5. <math>-</math></p> <p>Пропуск 6. <math>-8\sqrt{t}</math></p> <p>Пропуск 7. 14</p> <p>Пропуски 8. <math>-4</math></p> <p>Пропуск 9. <math>4t^2</math></p> <p>Пропуски 10. 44</p> <p>Пропуск 12.</p> $11 \pm 6\sqrt{2}$ <p>Пропуск 13, 14</p> $x - 1$ <p>Пропуск 15. 13</p>
---	--

$x = \frac{13-6\sqrt{2}}{2} + 1, x = \frac{9-6\sqrt{2}}{2} + 1$		Пропуск 16. 9
<b>Вправа 4.</b>		
Поєднати початкове рівняння та рівняння зі зміненою змінною.		
Початкове рівняння	Рівняння з заміною	
$\sqrt{x+4} = 2x - 3$	$t = 2t^2 - 11$	
$\sqrt{x} + 3 = x$	$t + 3 = t^2$	
$\sqrt{3x+2} = \sqrt{x+6}$	$\sqrt{3t-16} = \sqrt{t}$	
$\sqrt{x+2} = \sqrt{x-2}$	$\sqrt{t} = \sqrt{t-4}$	
$\sqrt[3]{x^2+4x+4} = x+3$	$\sqrt[3]{t^2} = t+1$	
$\sqrt{2x-1} + \sqrt{x+1} = 3$	$\sqrt{2t-3} + \sqrt{t} = 3$	

#### **Висновки та перспективи подальших пошуків у напрямі дослідження.**

Враховуючи тенденції змін в системі освіти, які спрямовані на розвиток критичного мислення, аналітичних здібностей та вміння розв'язувати складні математичні задачі, виникає потреба в оновленні методичних підходів до вивчення ірраціональних рівнянь. Сучасні вимоги до шкільної освіти передбачають інтеграцію нових педагогічних технологій, диференційований підхід до навчання, застосування індивідуальних траєкторій розвитку учнів та використання інформаційних технологій, що може сприяти більш ефективному засвоєнню теми. Одним з можливих варіантів використання інформаційних технологій є створення тестів та вправ для перевірки знань та відпрацювання умінь учнями.

#### **Список використаної літератури:**

1. Навчальна програма з математики для учнів 10-11 класів загальноосвітніх навчальних закладів (профільний рівень), затверджена Наказом Міністерства освіти і науки № 1407 від 23 жовтня 2017 року
2. Інтерактивні технології навчання: Теорія, досвід: метод. посіб. авт. - уклад.: О. Пометун, Л. Пироженко. – К.: А.П.Н.; 2002, - 136 с

3. LearningApps. Офіційний веб-сайт. URL: <https://learningapps.org/>.

**Відомості про авторів:**

*Кривонос Олександра Вікторівна – студентка II курсу магістратури факультету математики, природничих наук та технологій Центральноукраїнського державного університету імені Володимира Винниченка, тел.+3809993144700, e-mail [11299575@cuspu.edu.ua](mailto:11299575@cuspu.edu.ua).*

*Войналович Наталія Михайлівна – кандидат педагогічних наук, доцент, доцент кафедри математики та цифрових технологій Центральноукраїнського державного університету імені Володимира Винниченка, тел. +380957259390, e-mail: [n.m.voinalovych@cuspu.edu.ua](mailto:n.m.voinalovych@cuspu.edu.ua).*