УДК 371.3 : 519.11

КОМБІНАТОРНІ ЗАДАЧІ В ШКІЛЬНОМУ КУРСІ МАТЕМАТИКИ

Сердюк Зоя, Марштупа Карина

Науковий керівник: канд. пед. наук, доцент Сердюк З.О.

Черкаський національний університет імені Богдана Хмельницького,

м. Черкаси, Україна

У статті розглянуто важливість вивчення елементів комбінаторики у шкільному курсі математики. Особливий акцент вчителю математики варто поставити на розв'язуванні задач на обчислення кількості перестановок, розміщень та комбінації. У роботі запропоновано задачі трьох рівнів складності: початкового, середнього та підвищеного. Розв'язання кожної задачі пропонуємо розбити на окремі етапи для кращого розуміння учнями. Доцільно використовувати задачі прикладного спрямування, щоб підвищити зацікавленість учнів. Завдання такого типу також будуть корисними для підготовки до ЗНО/НМТ.

Ключові слова: *елементи комбінаторики, шкільний курс математики, задачі різних рівнів складності.*

Combinatory problems in the school mathematics course

Z. Serdyuk, K. Marshtupa

Scientific supervisor: Candidate of Pedagogic Science, associate professor Serdyuk Z.O.

Cherkasy National University named after Bohdan Khmelnytskyi,

Cherkasy, Ukraine

The article discusses the importance of studying the elements of combinatorics in the school mathematics course. A mathematics teacher should place special emphasis on solving problems to calculate the number of permutations, placements, and combinations. The paper proposes problems of three levels of complexity: elementary, intermediate, and advanced. We propose to divide the solution of each problem into separate stages for better understanding by students. It is advisable to use applied problems to increase students' interest. Problems of this type will also be useful for preparing for the external assessment/national technical examination.

Keywords: *elements of combinatorics, school mathematics course, problems of different levels of complexity.*

Постановка проблеми. У шкільному курсі математики в 11 класі на вивчення з теми «Елементи комбінаторики, теорії ймовірностей і математичної статистики» відведено 10 годин (рівень стандарту). У результаті вивчення учні мають засвоїти: елементи комбінаторик, а саме, перестановки, розміщення, комбінації (без повторень); класичне визначення ймовірності випадкової події; вибіркові характеристики: розмах вибірки, мода, медіана, середнє значення; графічне подання інформації про вибірку, а це занадто мало для вивчення цієї теми [1]. На профільному рівні вивчення алгебри відведено 30 годин. У результаті вивчення теми учні мають засвоїти: елементи комбінаторики, а саме, перестановки, розміщення, комбінації; аксіоми теорії ймовірностей; операції над подіями; основні наслідки з аксіом теорії ймовірностей; незалежні події; умовна ймовірність; випадкова величина та її математичне сподівання (у досліді зі скінченною множиною елементарних наслідків) [2]. Крім того, варто врахувати, що ця тема вивчається в кінці навчального року, а тому вчителі часто, через різні об'єктивні обставини (карантин, повітряні тривоги, дистанційне навчання) не встигають в повному обсязі розглянути та детально пропрацювати всі елементи під час розв'язування задач. До того ж, у цей час учні активно готуються до НМТ та можуть менше часу витрачати на відпрацювання даної теми, хоч задачі з комбінаторики обов'язково наявні щорозу в завданнях ЗНО/НМТ з математики.

Аналіз досліджень та публікацій. Деякі питання, методи викладаня елементів комбінаторики, а саме, перестановки, розміщення, комбінації, розглядалися в роботах українських математиків, методистів, зокрема Війчук Т.І., Кондратьєвої О.М., Третяка М.В., Крилової Т.В., Трунової О.В. та ін.

Мета статті – розглянути особливості комбінаторних задач різного рівня на матеріалі шкільного курсу алгебри і початку аналізу.

Виклад основного матеріалу (результатів) дослідження. Вчитель може зокрема подати цей навчальний матеріал для учнів в ігровій формі, провести засвоєння теми роботою в малих групах (їх доцільно розділити на різнорідні групи (в групі різний рівень навчальних досягнень)), запропонувати учням різнорівневі практичні завдання та завдання у вигляді інтерактивних вправ тощо.

Поділимо задачі на три рівні: задачі початкового рівня складності, задачі середнього рівня складності, задачі підвищеної складності (розв'язання кожного типу задач розбиваємо на етапи).

Задачі початкового рівня складності.

Задача 1. У кафе є 5 видів перших страв і 3 види других. Скількома способами можна обідати, вибравши одну першу і одну другу страву?

Розв'язання.

1) Вибір першої страви: 5 способів; 2) вибір другої страви: 3 способи; 3) за вище згаданим правилом добутку отримаємо: $5 \cdot 3 = 15$ способів.

Відповідь: 15 способів вибору обіду.

Задача 2. У коробці 4 червоні кульки і 6 синіх. Скількома способами можна витягнути одну кульку?

Розв'язання.

1) Всього кульок: 4 + 6 = 10. (правило суми); 2) вибір однієї кульки: 10 способів.

Відповідь: 10 способів витягнути одну кульку.

Задача 3. Скільки різних двозначних чисел можна скласти з цифр 1, 2, 3, якщо цифри в числі не повторюються?

Розв'язання.

1) На першому місці може стояти будь-яка із 4 цифр; 2) на другому місці може стояти будь-яка із 3 цифр, що залишилися; 3) за правилом множення маємо: $4 \cdot 3 = 12$ чисел.

Відповідь: 12 двоцифрових чисел.

Задача 4. У шаховому турнірі беруть участь 8 шахістів. Скільки всього партій буде зіграно, якщо кожен шахіст зіграє з кожним іншим по одній партії?

Розв'язання.

1) Перший гравець може зіграти з 7 іншими; 2) другий гравець, не рахуючи партії з першим, зіграє з 6 іншими; 3) і так далі; 4) загальне число партій: 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 28 або за формулою суми арифметичної прогресії.

Відповідь: 28 партій.

Задача 5. Скількома способами можна розставити 6 різних книг на полиці?

Розв'язання.

1) 6 книг можна розставити 6! способами; 2) $6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720.$

Відповідь: 720 способів.

Задачі середнього рівня складності

Задача 6. Скільки різних чотиризначних чисел можна скласти з цифр 1, 2, 3, 4, 5, якщо цифри в числі не повторюються?

Розв'язання.

1) На першому місці може стояти будь-яка із 5 цифр; 2) на другому місці може стояти будь-яка із 4 цифр, що залишилися; 3) на третьому місці може стояти будь-яка із 3 цифр, що залишилися; 4) на четвертому місці може стояти будь-яка із 2 цифр, що залишилися; 5) за правилом множення маємо: $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 120$ чисел.

Відповідь: 120 чотиризначних чисел.

Задача 7. Скількома способами можна вибрати президента, віце-президента і секретаря з групи з 10 осіб?

Розв'язання.

1) Вибір президента: 10 способів; 2) вибір віце-президента: 9 способів (одина людина уже обрана президентом); 3) вибір секретаря: 8 способів; 4) за правилом множення маємо: $10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$ способів.

Відповідь: 720 способів.

Задачі підвищеної складності

Задача 8. Скількома способами можна розставити 5 білих і 4 чорних куль в ряд так, щоб білі і чорні кульки чергувалися? (Розглянути чотири варіанти розв'язку: - коли всі білі та чорні кулі однакові;

- коли всі білі та чорні кулі різні;
- коли всі білі різні, а всі чорні однакові;
- коли всі чорні різні, а всі білі однакові.)

Розв’язання.

1) Вибір стартової кульки: ми можемо почати з білої або чорної кульки. Це дає нам 2 варіанти; 2) розстановка решти кульок: після вибору стартової кульки, всі інші кульки розставляються однозначно, оскільки вони повинні чергуватися; 3) розпочнемо з білої (рис. 1);

Рис. 1

4) розпочнемо з чорної (рис. 2);

Рис. 2

5) підходить варіант, коли розпочинаємо з білої кулі, тоді виконуються всі умови;

6) у випадку, коли всі білі та чорні кулі різні маємо:

- на першому місці може бути 5 білих куль;
- на другому місці може бути 4 чорних кулі;
- на третьому місці може бути 4 білих кулі;
- на четвертому місці може бути 3 чорних кулі;
- і так далі;
- застосуємо формулу добутку: $5! \cdot 4! = 2\,880$ способів;

7) у випадку, коли всі білі різні, а всі чорні однакові:

- чорні фіксовані та нерухомі;
- першу білу кульку можемо вибрати 5-ма способами;
- другу білу кульку можемо вибрати 4-ма способами;
- і так далі;
- 5! = 120 способів;

8) у випадку, коли всі чорні різні, а всі білі однакові:

- білі фіксовані та нерухомі;

- першу чорну кульку можемо вибрати 4-ма способами;
- другу чорну кульку можемо вибрати 3-ма способами і т.д.;
- 4! = 24 способи.

Відповідь: 1 спосіб; 2 880 способів; 120 способів; 24 способи.

Задача 9. Скількома способами можна розставити 8 різних книг на двох полицях так, щоб на першій полиці було 5 книг?

Розв'язання.

1) вибираємо 5 книг із 8 для першої полиці: C_8^5 способів; 2) інші 3 книги автоматично попадуть на другу полицю; 3) $C_8^5 = \frac{8!}{5! \cdot 3!} = 56$ способів.

Відповідь: 56 способів.

Висновки та перспективи подальших пошуків у напрямі дослідження. Перспективи подальших наукових розвідок ми вбачаємо у створенні системи інтерактивних задач з комбінаторики для учнів 11 класів ЗЗСО.

Список використаної літератури:

1. Навчальна програма з математики (алгебра і початки аналізу та геометрія) для учнів 10-11 класів загальноосвітніх навчальних закладів Рівень стандарту. Режим доступу : https://osvita.ua/school/program/program-10-11/58878/
2. Навчальна програма з математики для учнів 10-11 класів загальноосвітніх навчальних закладів Профільний рівень. Режим доступу : https://osvita.ua/school/program/program-10-11/58879/
3. Математика : алгебра і початки аналізу та геометрія, рівень стандарту: підруч. для 11 кл. закладів загальної середньої освіти / А. Г. Мерзляк, Д. А. Номіровський, В. Б. Полонський та ін. – Х. : Гімназія, 2019. – 208 с. Режим доступу : https://shkola.in.ua/1125-matematyka-11-klas-merzliak-2019.html
4. Алгебра. 11 клас: підруч. для загальноосвіт. навчальн. за кладів: академ. рівень, проф. рівень / А. Г. Мерзляк, Д. А. Номіровський, В. Б. Полонський, М. С. Якір. – Х.: Гімназія, 2011. – 431 с. Режим доступу : https://pidruchnyk.com.ua/439-algebra-merzlyak-nomrovskiy-polonskiy-yakr-11-klas.html

Відомості про авторів:

Сердюк Зоя Олексіївна – кандидат педагогічних наук, доцент, завідувач кафедри *математики та МНМ Черкаського національного університету імені Богдана Хмельницького, тел. 0975609393, e-mail: serdyuk_z@ukr.net.*

Марштупа Карина Андріївна – студентка 3-го курсу бакалаврату спеціальності 014.04. Середня освіта (Математика) Черкаського національного університету імені Богдана Хмельницького, тел. 0683652402, e-mail: karisha.marshtupa@gmail.com