УДК 517.51

РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ПРИКЛАДНИХ ЗАДАЧ З ТЕМИ "КООРДИНАТИ ТА ВЕКТОРИ У ПРОСТОРІ"

Попруга Тетяна, Войналович Наталія

Науковий керівник : кандидат педагогічних наук, доцент кафедри математики та цифрових технологій Войналович Н.М.

Центральноукраїнський державний університет імені Володимира Винниченка, м. Кропивницький, Україна

У даній публікації досліджується практичне використання координат та векторів у тривимірному просторі. Тема «Координати та вектори» є важливою складовою математичної освіти кожної людини. Вона має великий потенціал для формування ключових та предметних компетентностей тих, хто навчається. Прикладні задачі охоплюють самі різноманітні сфери людської діяльності. Завдання ж вчителя полягає в тому, щоб відшукати такі задачі та організувати цікаву і захоплюючу діяльність учнів для їх розв'язання. У статті наводяться конкретні приклади таких завдань, для розв'язання яких достатньо знати та вміти виконувати основні операції над векторами. Показано, як можна використовувати спеціалізований інтерактивний калькулятор для етапної перевірки здійснених обчислень, або взагалі позбутися рутинних обчислень.

Ключові слова: *координати, вектори, простір, площина, прикладні задачі, математичні концепції, геометрія, спеціалізований інтерактивний калькулятор.*

SOLVING APPLIED PROBLEMS ON THE TOPIC "COORDINATES AND VECTORS IN SPACE"

Tatyana Popruga, Nataliya Voinalovych

Academic supervisor: candidate of pedagogical sciences, associate professor of the department of mathematics and digital technologies Voinalovych N.M.

This publication explores the practical use of coordinates and vectors in three-dimensional space. The topic "Coordinates and vectors" is an important component of every person's mathematical education. It has great potential for the formation of key and subject competencies of those who study. Applied problems cover the most diverse spheres of human activity. The teacher's task is to find such problems and organize interesting and exciting activities for students to solve them. The article gives specific examples of such tasks, for the solution of which it is enough to know and be able to perform basic operations on vectors. It is shown how you can use *a specialized interactive calculator for step-by-step verification of performed calculations, or get rid of routine calculations altogether.*

Keywords: *coordinates, vectors, space, plane, applied problems, mathematical concepts, geometry, specialized interactive calculator.*

Проблема дослідження: Тема «Координати та вектори» є досить абстрактною темою шкільного курсу математики. Вона складно сприймається учнями як в середній, так і в старшій школі.

Проте, вектори є невід'ємною частиною нашого світу. Ми їх не бачимо, але вони оточують нас у багатьох сферах нашого життя та відіграють важливу роль у різних природних та технічних явищах. Саме тому треба не лише ґрунтовно розуміти основні поняття теорії векторів, але й вміти розв’язувати прикладні задачі.

Прикладні задачі, пов'язані з координатами та векторами у просторі, є дуже важливими для формування ключових та предметних компетентностей учнів. Вони включають в себе різні види послідовних дій з координатами та векторами, що сприяє глибокому засвоєнню навчального матеріалу. Проте, при розв’язуванні таких задач навіть незначна помилка на окремому етапі обчислення може призвести до серйозних помилок у відповіді, оскільки всі дії взаємозалежні.

Одним із способів полегшення розв’язання таких завдань є використання розробленого нами інтерактивного калькулятора. Калькулятор здатний виконувати основні дії з координатами та векторами як на площині, так і у просторі. Це допомагає учням перевіряти кожен крок задачі, забезпечуючи точність та правильність їхніх відповідей. В окремих випадках він взагалі може позбавити учнів рутинної роботи в обчисленнях, а вивчення математики зробити цікавим та доступним.

Аналіз досліджень і публікацій: У різних країнах світу ведуться дослідження у галузі прикладних математичних задач, оскільки це є важливим і перспективним напрямком у розвитку науки та технологій. У багатьох роботах звертається увага на доцільність використання комплексних прикладних задач. Рекомендується етапний підхід у їх розв’язанні та наголошується на важливості перевірки кожного етапу для отримання точних результатів. Тож проблема навчання розв'язування прикладних завдань з координатами та векторами залишається дуже актуальною і важливою.

Мета статті: Полягає в розкритті можливостей координат та векторів для формування ключових та предметних компетентностей учнів старшої школи. Також ми прагнули навести приклади прикладних задач з різних галузей знань та показати доцільність застосування інтерактивного калькулятора для їх розв'язання.

Виклад основного матеріалу (результатів) дослідження:

Задача 1: Розрахунок тяжіння на мості

Майстерність мостобудівників полягає в ретельному розрахунку всіх сил, що діють на конструкцію. Розглянемо ситуацію, де на місті визначено точки підпору, *P(2; 1; −3)* та *Q(5; 4; 1)*, а також точку прикріплення тросу, *R(—1; 0; 2)*, яку планують використовувати для підняття матеріалів.

Міст має точки підпору у точках *P* і *Q,* а також точку *R* для прикріплення тросу. Довжина тросу достатня для того, щоб підняти матеріали з обох кінців моста.

1. Знайдіть вектор тяжіння тросу, якщо він направлений від точки R до точки P.
2. Знайдіть вектор тяжіння, якщо трос направлений від точки R до точки Q.
3. Перевірте, чи колінеарні вектори тяжіння в обох випадках.
4. Знайдіть вектор, що представляє собою різницю між векторами тяжіння, коли трос направлений від R до P та від R до Q.
5. Знайдіть довжину вектору тяжіння у кожному випадку.
6. Знайдіть кут між векторами тяжіння в обох ситуаціях.

Розв'язання:

1. Вектор тяжіння від R до P:

$$\overline{PR} = (x_P - x_R;\ y_P - y_R;\ z_P - z_R)$$

$$\overline{PR} = (2 - (-1);\ 1 - 0;\ (-3) - 2) = (3; 1; -5)$$

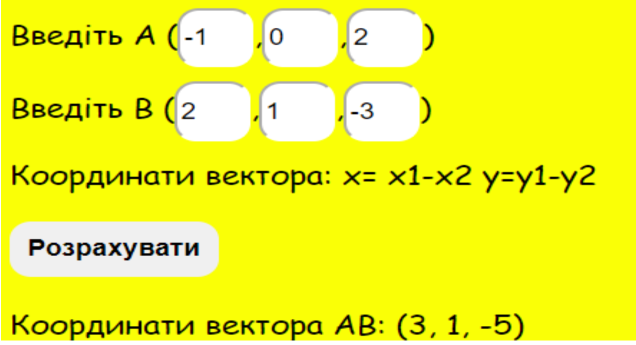

Рис. 1 - Розрахунок координат вектору.

2. Вектор тяжіння від *R* до *Q:*

$$\overline{RQ} = \left(x_Q - x_R;\ y_Q - y_R;\ z_Q - z_R\right)$$

$$\overline{RQ} = (5 - (-1);\ 4 - 0;\ 1 - 2) = (6;\ 4; -1)$$

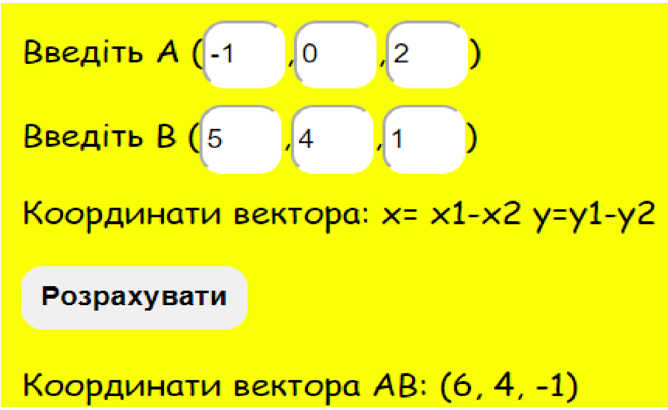

Рис. 2 - Розрахунок координат вектору .

3. Перевірка колінеарності:

$$\frac{3}{6} \neq \frac{1}{4} \neq \frac{-5}{-1}$$

Оскільки відповідні координати не пропорційні, вектори $\overline{RP}$ та $\overline{RQ}$ не колінеарні.

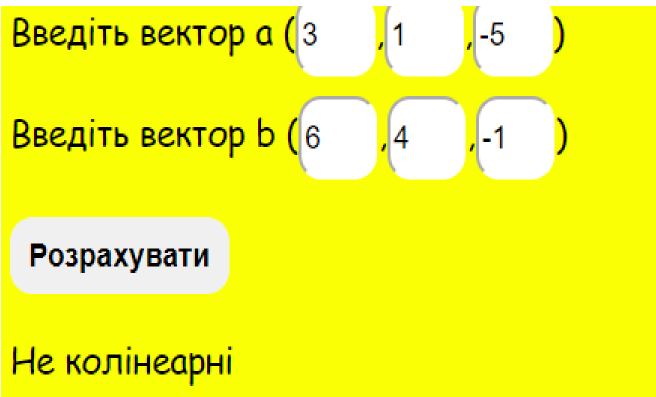

Рис. 3 - Розрахунок колінеарності векторів.

4. Вектор різниці:

$$\overline{RP} - \overline{RQ} = (3; 1; -5) - (6; 4; -1) = (-3; -3; -4)$$

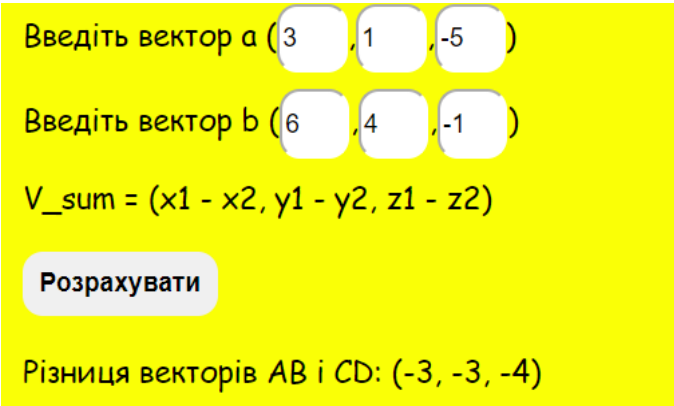

Рис. 4 - Розрахунок різниці двох векторів.

5. Довжина векторів тяжіння:

$$|\overline{RP}| = \sqrt{3^2 + 1^2 + (-5)^2} = \sqrt{35} = 5{,}9161$$

$$|\overline{RQ}| = \sqrt{6^2 + 4^2 + (-1)^2} = \sqrt{53} = 7{,}2801$$

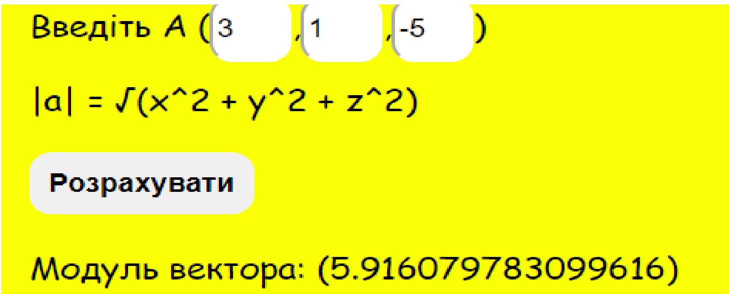

Рис. 5 - Розрахунок модуля вектора.

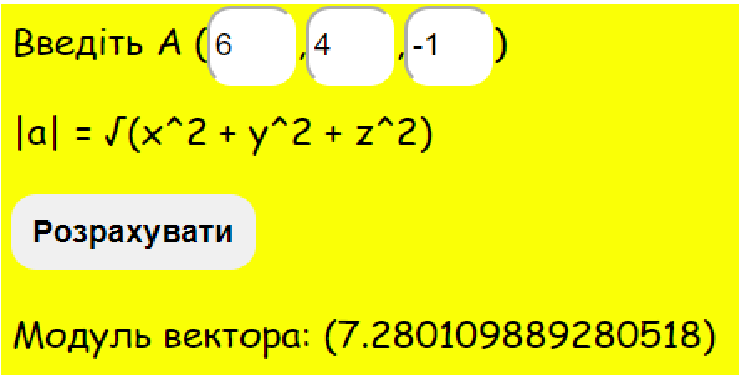

Рис. 6 - Розрахунок модуля вектора.

6. Кут між векторами:

$$cos\theta = \frac{\overline{RP} \cdot \overline{RQ}}{|\overline{RP}| \cdot |\overline{RQ}|} = \frac{(3; 1; -5) \cdot (6; 4; -1)}{\sqrt{35} \cdot \sqrt{53}} = \frac{3 \cdot 6 + 1 \cdot 4 + (-5) \cdot (-1)}{\sqrt{35} \cdot \sqrt{53}} = \frac{27}{\sqrt{1855}} = 0{,}627$$

$$arccos(0{,}627) = 51{,}17087$$

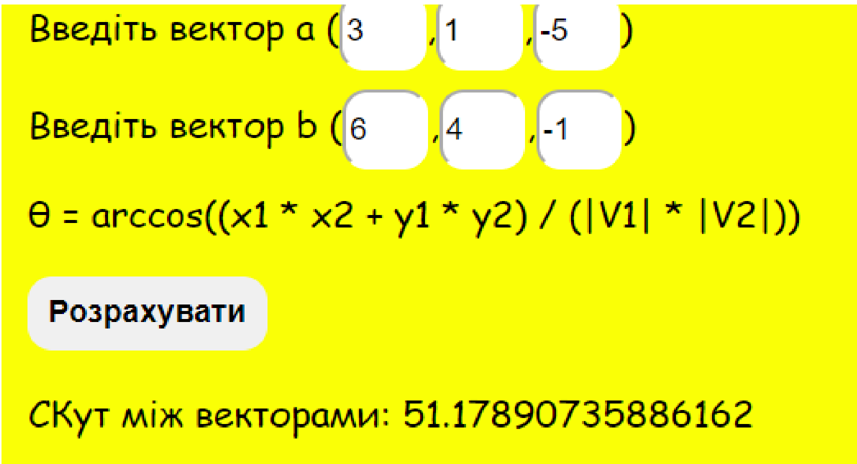

Рис. 7 - Визначення кута між векторами.

Ця задача реально моделює ситуацію, яку будівничі мостів можуть зустріти при піднятті вантажів за допомогою тросів та точок прикріплення.

Задача 2: Планування маршруту польоту дрона

Дрон стартує з точки *A(-3; 2; 1)* і повинен долетіти до точки *B(5; -1; 4)* для зйомки аерофотознімків місцевості. Під час польоту дрон виконує різні маневри.

1. Під час польоту дрону від точки *A* до точки *B* він пролітає через точку *C(0; 4; -2)*. Перевірте, чи вектори $\overline{AB}$ та $\overline{AC}$ є колінеарними.
2. Для оптимізації енергоспоживання дрона планується зробити коротший перехід через точку *D(1; 3; 0)*. Знайдіть координати кінця відрізка *CD*, використовуючи координати точок *C* та *D*.
3. Обчисліть відстань між точками *B* та *D* і визначте, чи дрон може безпечно облетіти цю точку під час маршруту.
4. Планується змінити швидкість дрона, подолавши відстань від точки *C* до точки *E(2; -2; 3)*. Знайдіть вектор швидкості, помноживши вектор $\overline{CD}$ на коефіцієнт 0.5.
5. Під час польоту дрон має змінити кут напрямку від точки *C* до точки *B*. Знайдіть скалярний добуток векторів $\overline{CD}$ і $\overline{CB}$ за їхніми координатами.

<u>Розв'язання:</u>

1. Перевірка на колінеарність:

Вектор $\overline{AB}$:

$$\overline{AB} = (x_B - x_A;\ y_B - y_A;\ z_B - z_A)$$

$$\overline{AB} = (5 - (-3);\ (-1) - 2;\ 4 - 1) = (8;\ -3;\ 3)$$

Вектор $\overline{AC}$:

$$\overline{AC} = (x_C - x_A;\ y_C - y_A;\ z_C - z_A)$$

$$\overline{AC} = (0 - (-3);\ 4 - 2;\ (-2) - 1) = (3;\ 2;\ -3)$$

$$\frac{8}{3} \neq \frac{-3}{2} \neq \frac{3}{-3}$$

Оскільки координати не пропорційні, вектори $\overline{AB}$ та $\overline{AC}$ не колінеарні.

2. Знаходження координати кінця відрізка за серединою:

Координати середини відрізка *CD* можна знайти за формулою:

$$x_D = \frac{x_C + x_D}{2}; \qquad y_D = \frac{y_C + y_D}{2}; \qquad z_D = \frac{z_C + z_D}{2}$$

$$x_D = \frac{1+2}{2} = 1.5; \quad y_D = \frac{3+(-2)}{2} = 0.5; \quad z_D = \frac{0+3}{2} = 1.5$$

Таким чином, координати точки *D* дорівнюють *D(1.5; 0.5; 1.5)*.

3. Знаходження відстані між точками:

Відстань між точками *B* і *D* можна знайти за формулою відстані між двома точками в просторі:

$$d = \sqrt{(x_B - x_D)^2 + (y_B - y_D)^2 + (z_B - z_D)^2}$$

$$d = \sqrt{(5 - 1.5)^2 + ((-1) - 0.5)^2 + (4 - 1.5)^2}$$

$$d = \sqrt{3.5^2 + (-1.5)^2 + 2.5^2} = \sqrt{12.25 + 2.25 + 6.25} = \sqrt{20.75}$$

$$d \approx 4.55$$

4. Добуток вектора на число:

Добуток вектора $\overline{CD}$ на число *0.5*:

$$0.5 \times \overline{CD} = (0.5 \cdot (-3);\ 0.5 \cdot (-3);\ 0.5 \cdot (-4))$$

$$0.5 \times \overline{CD} = (-1.5, -1.5, -2)$$

5. Скалярний добуток за координатами:

Скалярний добуток векторів $\overline{CD}$ і $\overline{CB}$:

$$\overline{CD} \cdot \overline{CB} = (-3 \cdot 8) + (-3 \cdot (-3)) + (-4 \cdot 3)$$

$$\overline{CD} \cdot \overline{CB} = -24 + 9 - 12 = -27$$

Ця задача моделює реальний сценарій використання дрону для виконання завдань в відео та фото зйомці, а також у сучасній військовій підготовці, на передовій та вимагає від учнів застосування різних операцій з координатами та векторами.

Задача 3: Місце призначення

Андрій планує подорож у просторі, відвідавши кілька точок. Початкова точка подорожі - Токіо з координатами T(1; 3; −2). Він рухається на захід до Сіднея, відстань до якого дорівнює 15 кілометрів. Знаючи це:

1. Знайдіть координати точки Сіднея.
2. Знайдіть координати точки половини маршруту між Токіо та Сіднеєм.
3. Знайдіть вектор руху Андрія від Токіо до Сіднея.
4. Обчисліть довжину вектора руху.
5. Якщо Андрій планує з Токіо податись далі на північ до Окленда з координатами A (5; −2; 4)
6. Знайдіть вектор руху від Сіднея до Окленда.
7. Знайдіть суму векторів Токіо-Сідней та Сідней-Окленд.
8. Обчисліть скалярний добуток векторів Токіо-Сідней та Сідней-Окленд за даними координатами.

<u>Розв’язання:</u>

1. Координати точки Сіднея:

S (x ; y ; z): Координата *x* зменшується на 15 одиниць (оскільки відстань на захід), решта координат залишаються без змін.

$$S\,(1 - 15;\ 3;\ -2) = S\,(-14;\ 3;\ -2).$$

2. Середина відрізка між Токіо та Сіднеєм:

Координати середньої точки M визначаються як середнє значення відповідних координат кінців відрізка.

$$M = \left(\frac{1-14}{2};\ \frac{3+3}{2};\ \frac{-2-2}{2}\right) = M(-6{,}5;\ 3;\ -2).$$

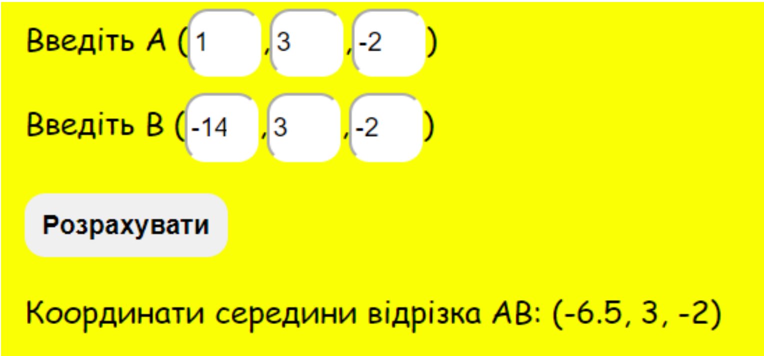

Рис. 6 - Пошук середини відрізка.

3. Вектор руху Андрія від Токіо до Сіднея:

Він представляє собою вектор різниці координат Сіднея і Токіо.

$$\overline{TS} = (-14 - 1; 3 - 3; -2 - (-2)) = (-15; 0; 0).$$

4. Довжина вектора руху:

Використовуючи формулу довжини вектора:

$$|\overline{TS}| = \sqrt{(-15)^2 + 0^2 + 0^2} = 15 \text{ км}.$$

5. Вектор руху від Сіднея до Окленда:

$$\overline{SA} = (5 - (-14);\ -2 - 3;\ 4 - (-2)) = (19; -5; 6)$$

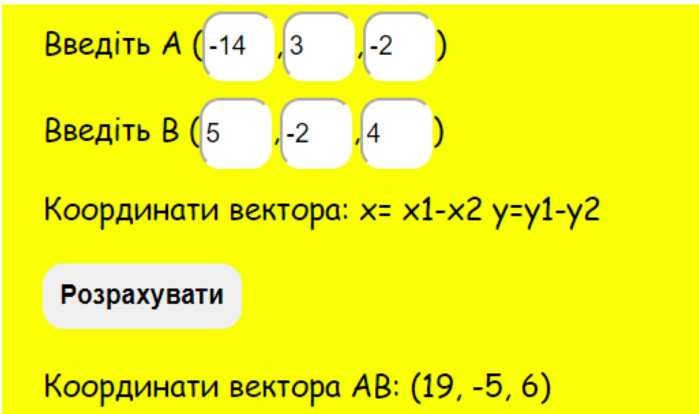

Рис. 7 - Визначення координат вектора.

6. Сума векторів Токіо-Сідней та Сідней-Окленд:

$$\overline{TS} + \overline{SA} = (-15 + 19;\ 0 - 5;\ 0 + 6) = (4; -5; 6)$$

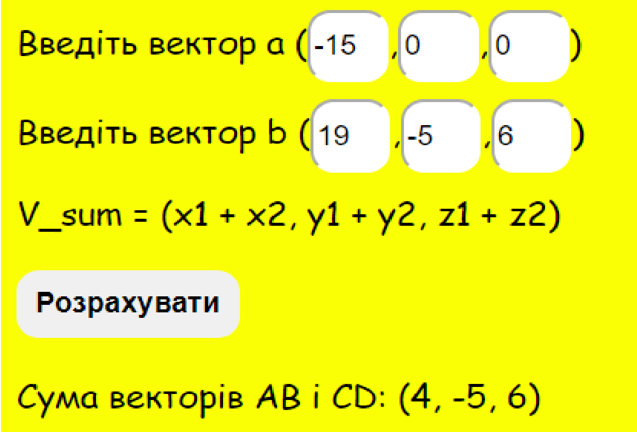

Рис. 8 - Визначення суми двох векторів.

7. Скалярний добуток векторів Токіо-Сідней та Сідней-Окленд:

$$\overline{TS} \times \overline{SA} = (-15 \times 19) + (0 \times -5) + (0 \times 6) = -285$$

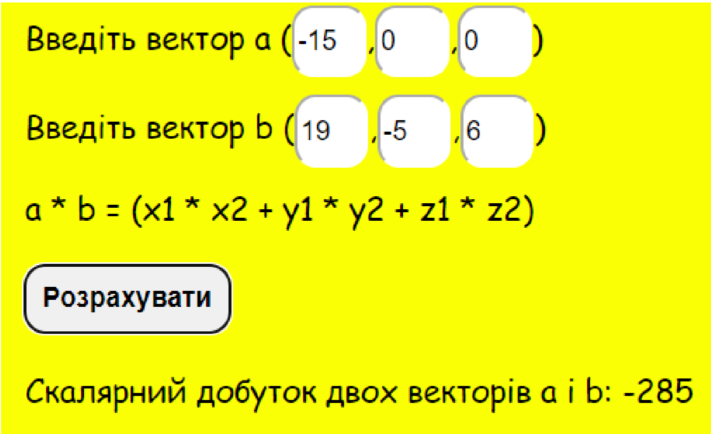

Рис. 9 - Розрахунок скалярного добутку двох векторів.

Висновки та перспективи подальших пошуків у напрямі дослідження: Тема «Координати та вектори» є важливою складовою математичної освіти, яка має значний потенціал для розвитку ключових та предметних компетентностей учнів. Вона охоплює різноманітні сфери нашого життя і може бути відображена в різних прикладних задачах. Основне завдання вчителя полягає в тому, щоб знайти такі задачі та організувати цікаву навчальну діяльність для їх розв’язання. Головна мета – зробити математику цікавою та доступною, показавши її застосування у реальному світі.

Список використаної літератури

1. Габрель М. М. Просторова організація містобудівних систем: монографія / М. М. Габрель. - К. : Видав. дім А.С.С., 2004. - 400 с.

2. Рудик А.В. Методи вимірювання координат та параметрів руху об'єктів з використанням супутникових радіонавігаційних систем: Вісник інженерної академії України, №4, 2015.

3. Романюк О.Н., Дудник О.О., Романюк О.В. Модифікований метод parallax mapping з використанням карти відстаней до поверхні: Інформаційні технології та комп'ютерна інженерія, №1, 2017.

4. Кульчицька Н.В., Собкович Р.І. Застосування методів векторної алгебри в різних математичних задачах: Актуальні питання природничо-математичної освіти, №9, 2017. - 198с.