УДК 378.016:517

СТВОРЕННЯ ЗАДАЧ, ПОВ'ЯЗАНИХ З ЧИСЛОВИМИ ПОСЛІДОВНОСТЯМИ І РЯДАМИ ЗА ДОПОМОГОЮ ГЕОМЕТРИЧНОЇ МОДЕЛІ З ВИКОРИСТАННЯМ ГРАФІКІВ ФУНКЦІЙ $y = \ln x$; $y = \frac{1}{x}$; $y = x^n$

Сьомкіна Катерина

Науковий керівник: канд. техн. наук, професор Корольський В.В.

Криворізький державний педагогічний університет,

м. Кривий Ріг, Україна

У статті представлено приклади побудови числових рядів з використанням відомих функцій: $y = ln\,x$; $y = \frac{1}{x}$; $y = x^n$. *Досліджується збіжність одержаних числових рядів та їх частинних сум в залежності від значення n,* $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

Слід відмітити, що генерація числових рядів за допомогою графіків вказаних вище функцій дозволяє реалізувати один із важливих принципів дидактики, пов'язаний з візуалізацією досліджуваних понять та їх властивостей. Представлені результати виконаних досліджень можуть бути рекомендовані для створення задач, пов'язаних з вивченням теми «Числові послідовності» для учнів ліцею, а також задач, пов'язаних з одним із основних розділів математичного аналізу «Числові ряди», в процесі навчання студентів фізико-математичних факультетів педагогічних університетів.

Ключові слова: *числовий ряд, числові слова, частинні суми числового ряду, геометрична інтерпретація членів числових рядів, візуалізація , збіжність ряду, генерація числових рядів, геометричні образи, система задач, послідовність величин.*

Create problems related to numerical sequences and series with the help of a geometric model using graphs of functions $\mathbf{y = \ln x}$; $\mathbf{y = \frac{1}{x}}$; $\mathbf{y = x^n}$

K. Siomkina

Scientific supervisor: Candidate of technical sciences, Professor Korolskyi V.V.

Kryvyi Rih State Pedagogical University,

Kryvyi Rih, Ukraine

The article presents examples of constructing numerical series using known functions: $y = ln\,x$; $y = \frac{1}{x}$; $y = x^n$. *The convergence of the obtained numerical series and their partial sums is investigated depending on the value of n,* $\forall n \in N$.

It should be noted that the generation of numerical series using graphs of the above functions allows us to realize one of the important principles of didactics related to the visualization of the studied concepts and their properties. The presented results of the research can be recommended for creating tasks related to the study of the topic "Numerical sequences" for lyceum students, as well as tasks related to one of the main sections of mathematical analysis "Numerical series", in the process of teaching students of the physical and mathematical faculties of pedagogical universities.

Keywords: *number series, number words, partial sums of a number series, geometric interpretation of members of number series, visualization, series convergence, generation of number series, geometric images, system of problems, sequence of values.*

Постановка проблеми. У сучасному математичному аналізі та наукових дослідженнях числові ряди грають важливу роль, оскільки вони є потужним засобом для апроксимації функцій при їх вивчені та дослідженні. У зв'язку з цим важливим завданням є створення нових видів числових рядів на основі візуалізації їх членів за допомогою геометричних моделей, пов'язаних з різними геометричними об'єктами (послідовності точок, відрізків трикутників тощо), а також з використанням графіків елементарних функцій таких як $y = \ln x$; $y = \frac{1}{x}$; ; $y = x^n$.

Аналіз досліджень і публікацій. Дослідженнями числових послідовностей і числових рядів займались багато видатних математиків, що відображено в сучасних підручниках з математичного аналізу. У сучасних задачниках, пов'язаних з числовими послідовностями, для учнів ліцею і числовими рядами для студентів вищих навчальних закладів використовуються різні послідовності і ряди, які носять формальний характер, тобто не пов'язані з реальними умовами їх одержання і з іншими математичними поняттями. В останні часи з'явилися дослідження генерації членів послідовностей та числових рядів за допомогою геометричних моделей, побудованих шляхом використання геометричних образів, параметри яких пов'язані з комбінаціями класичних числових послідовностей, таких як: $\frac{1}{n}, \frac{n}{n+1}, \frac{1}{q^n}, a + d(n-1)$. Результати цих досліджень представлені в публікаціях як: В. Бобирь [1], С. Габ [3; 4], Н. Дзигарська [2], В. Корольський [2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10], А. Римар [7], О. Тураєва [2; 8], А. Христюк [1], А. Романова [10]. Однак на нашу думку доцільно розглянути і дослідити використання геометричних образів, якими є графіки функцій.

Мета статті. Метою наших досліджень є побудова та дослідження числових послідовностей і рядів на основі геометричної моделі, пов'язаної з графіками функцій: $y = \ln x$; $y = \frac{1}{x}$; $y = x^n$. Дослідженнями передбачено створення числових послідовностей і рядів та системи задач, пов'язаних з ними , які можуть бути використані в процесі навчання учнів ліцеїв та студентів ВНЗ. Результати дослідження можуть бути корисними для подальших математичних досліджень, пов'язаних з моделюванням і візуалізацією числових послідовностей та числових рядів.

Виклад основного матеріалу (результатів) дослідження. Розглянемо геометричну модель на рис.1

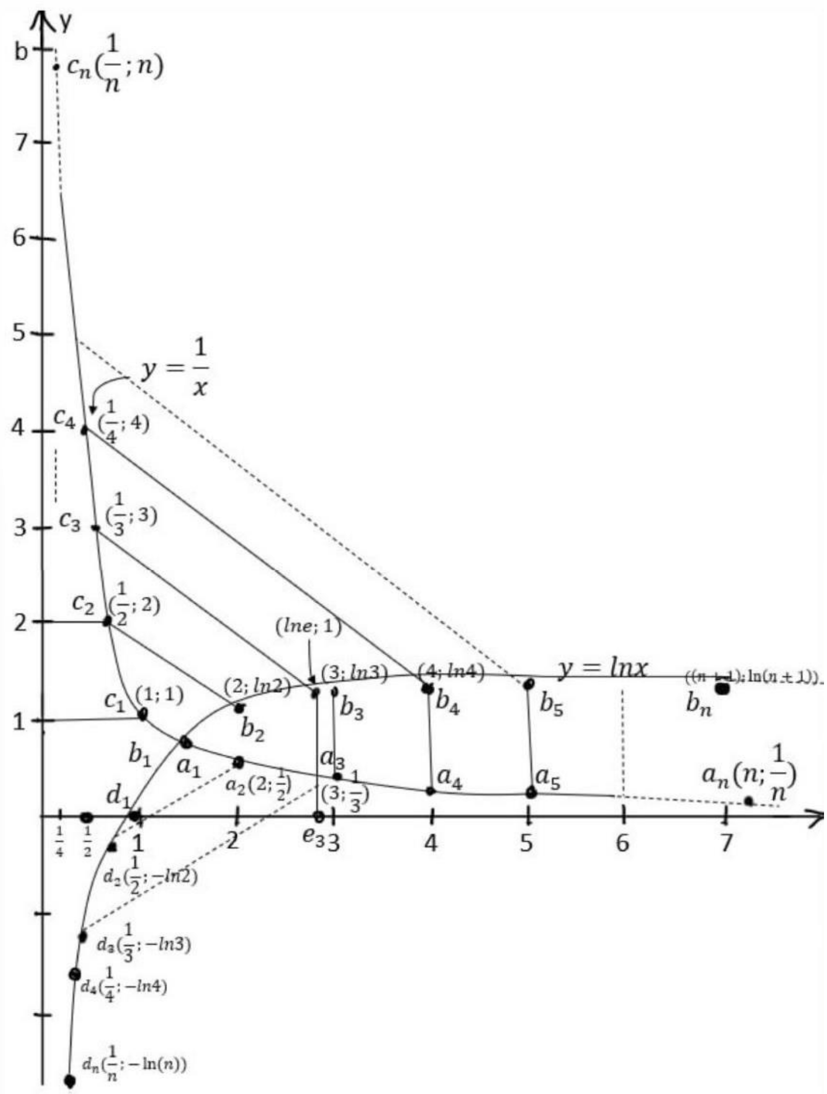

Рис.1. Графіки функцій $y = \frac{1}{x}, y = \ln x$, на яких розташовані послідовності точок $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$, $\{d_n\}$.

Візуально на моделі спостерігаємо послідовності, які стосуються координат послідовності точок. Для точок a_n маємо x_n задається загальним членом n, y_n — $\frac{1}{n}$, для точок b_n відповідають членам послідовності $x_n = n + 1$, $y_n = \ln(n+1)$, для точок c_n відповідають членам послідовності $x_n = \frac{1}{n}$, $y_n = n$, для точок d_n відповідають членам послідовності $x_n = \frac{1}{n}$, $y_n = \ln n$, де $\forall\, n \in \mathbb{N}$. Одержання вказаних послідовностей координат точок $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$, $\{d_n\}$ можна пропонувати як окремі задачі з точковою геометричною інтерпретацією як для учнів ліцею, так і для студентів ВНЗ.

Розглянемо декілька задач лінійної геометричної інтерпретації.

Задача 1. Скласти ряд довжин послідовності відрізків $\{\overline{b_n b_{n+1}}\}$.

Розв'язання:

Координати точок b_n відповідають членам послідовності $x_n = n + 1$, $y_n = \ln(n+1), \forall\, n \in \mathbb{N}$.

Далі використаємо формулу обчислення відстані між точками в системі координат OXY:

$$|\overline{b_1 b_2}| = \sqrt{(2-1)^2 + (\ln 2 - 0)^2} = \sqrt{1 + \ln 2^2},$$

$$|\overline{b_2 b_3}| = \sqrt{(3-2)^2 + (\ln 3 - \ln 2)^2} = \sqrt{1 + \ln \frac{3}{2}^2},$$

$$|\overline{b_3 b_4}| = \sqrt{(4-3)^2 + (\ln 4 - \ln 3)^2} = \sqrt{1 + \ln \frac{4}{3}^2},$$

. . . .

$$|\overline{b_n b_{n+1}}| = \sqrt{\big((n+1) - n\big)^2 + (\ln(n+1) - \ln(n))^2} = \sqrt{1 + \ln \frac{n+1}{n}^2}.$$

Одержуємо послідовність з загальним членом $\sqrt{1 + \ln \frac{n+1}{n}^2}$.

Задача 2. Скласти ряд довжин послідовності відрізків $\{\overline{a_n a_{n+1}}\}$.

Розв'язання:

Координати точок a_n відповідають членам послідовності $x_n = n$, $y_n = \frac{1}{n}$ $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

Далі використаємо формулу обчислення відстані між точками в системі координат OXY:

$$|\overline{a_1 a_2}| = \sqrt{\left(2 - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2} - 0\right)^2} = \frac{\sqrt{10}}{2},$$

$$|\overline{a_2 a_3}| = \sqrt{(3-2)^2 + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{37}}{6},$$

$$|\overline{a_3 a_4}| = \sqrt{(4-3)^2 + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{145}}{12},$$

. . . .

$$|\overline{a_n a_{n+1}}| = \sqrt{\big((n+1) - n\big)^2 + \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}\right)^2} = \frac{\sqrt{n^4 + 2n^3 + n^2 + 1}}{n^2 + n}.$$

Одержуємо послідовність з загальним членом $\frac{\sqrt{n^4+2n^3+n^2+1}}{n^2+n}$.

Задача 3. Скласти ряд довжин послідовності відрізків $\{\overline{c_n c_{n+1}}\}$.

Розв'язання:

Координати точок c_n відповідають членам послідовності $x_n = \frac{1}{n},\ y_n = n$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

Далі використаємо формулу обчислення відстані між точками в системі координат OXY:

$$|\overline{c_1 c_2}| = \sqrt{\left(\frac{1}{2} - 1\right)^2 + (2-1)^2} = \frac{\sqrt{5}}{2},$$

$$|\overline{c_2 c_3}| = \sqrt{\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right)^2 + (3-2)^2} = \frac{\sqrt{37}}{6},$$

$$|\overline{c_3 c_4}| = \sqrt{\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{3}\right)^2 + (4-3)^2} = \frac{\sqrt{145}}{12},$$

. . . .

$$|\overline{c_n c_{n+1}}| = \sqrt{\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}\right)^2 + ((n+1)-n)^2} = \frac{\sqrt{n^4+2n^3+n^2+1}}{n^2+n}.$$

Одержуємо послідовність з загальним членом $\frac{\sqrt{n^4+2n^3+n^2+1}}{n^2+n}$.

Задача 4. Скласти ряд довжин послідовності відрізків $\{\overline{d_n d_{n+1}}\}$.

Розв'язання:

Координати точок d_n відповідають членам послідовності $x_n = \frac{1}{n},\ y_n = \ln n$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

Далі використаємо формулу обчислення відстані між точками в системі координат OXY:

$$|\overline{d_1 d_2}| = \sqrt{\left(\frac{1}{2} - 1\right)^2 + (-\ln 2 - 0)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \ln 2^2},$$

$$|\overline{d_2 d_3}| = \sqrt{\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right)^2 + (-\ln 3 + \ln 2)^2} = \sqrt{\frac{1}{36} + \ln \frac{2}{3}^2},$$

$$|\overline{d_3 d_4}| = \sqrt{\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{3}\right)^2 + (-\ln 4 + \ln 3)^2} = \sqrt{\frac{1}{144} + \ln \frac{3}{4}^2},$$

. . . .

$$\left|\overline{d_n d_{n+1}}\right| = \sqrt{\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}\right)^2 + (\ln n + 1 - \ln n)^2} = \sqrt{\frac{1}{n^2+n} + \ln\frac{n}{n+1}^2}.$$

Одержуємо послідовність з загальним членом $\sqrt{\frac{1}{n^2+n} + \ln\frac{n}{n+1}^2}$.

Задача 5. Скласти ряд величини послідовності відстаней між точками $\{b_{n+1}\}\ \{a_{n+1}\}$.

Розв'язання:

Координати точок b_{n+1} відповідають членам послідовності $x_{n+1} = n + 1$, $y_{n+1} = \ln(n+1)$, а a_{n+1} — $x_{n+1} = n + 1,\ y_{n+1} = \frac{1}{n+1}, \forall\, n \in \mathbb{N}$.

Далі використаємо формулу обчислення відстані між точками в системі координат OXY:

$$\left|\overline{b_{n+1} a_{n+1}}\right| = \sqrt{\left((n+1) - (n+1)\right)^2 + \left(\frac{1}{n+1} - \ln(n+1)\right)^2} = \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) = \frac{1-(n+1)*\ln(n+1)}{n+1}.$$

Одержуємо послідовність з загальним членом $\frac{1-(n+1)*\ln(n+1)}{n+1}$.

Задача 6. Скласти ряд величини послідовності відстаней між точками $\{b_{n-1}\}\ \{a_{n+2}\}$.

Розв'язання:

Координати точок b_{n-1} відповідають членам послідовності $x_{n-1} = n$, $y_{n-1} = \ln n$, а a_{n+2} — $x_{n+2} = n + 2,\ y_{n+2} = \frac{1}{n+2}, \forall\, n \in \mathbb{N}$.

Далі використаємо формулу обчислення відстані між точками в системі координат OXY:

$$\left|\overline{b_{n-1} a_{n+2}}\right| = \sqrt{\left((n+2) - n\right)^2 + \left(\frac{1}{n+2} - \ln n\right)^2} = \sqrt{4 + \left(\frac{1-(n+2)*\ln n}{n+2}\right)^2}\quad .$$

Одержуємо послідовність з загальним членом $\sqrt{4 + \left(\frac{1-(n+2)*ln\,n}{n+2}\right)^2}$.

Задача 7. Скласти ряд величини послідовності відстаней між точками $\{b_{n+1}\}\ \{a_{n+1}\}$.

Розв'язання:

Координати точок b_{n+1} відповідають членам послідовності $x_{n+1} = n + 1$, $y_{n+1} = \ln(n + 1)$, а d_{n+1} — $x_{n+1} = \frac{1}{n+1}$, $y_{n+1} = \ln(n + 1), \forall\, n \in \mathbb{N}$.

Далі використаємо формулу обчислення відстані між точками в системі координат OXY:

$$\left|\overline{b_{n+1}d_{n+1}}\right| = \sqrt{\left(\frac{1}{n+1} - (n + 1)\right)^2 + (\ln(n + 1) - \ln(n + 1))^2} = -\frac{n^2+2n}{n+1}.$$

Одержуємо послідовність з загальним членом $-\frac{n^2+2n}{n+1}$.

Задача 8. Скласти ряд величини послідовності відстаней між точками $\{a_{n+1}\}\ \{d_{n+1}\}$.

Розв'язання:

Координати точок a_{n+1} відповідають членам послідовності $x_{n+1} = n + 1$, $y_{n+1} = \frac{1}{n+1}$, а d_{n+1} — $x_{n+1} = \frac{1}{n+1}$, $y_{n+1} = \ln(n + 1), \forall\, n \in \mathbb{N}$.

Далі використаємо формулу обчислення відстані між точками в системі координат OXY:

$$\left|\overline{a_{n+1}d_{n+1}}\right| = \sqrt{\left(\frac{1}{n+1} - (n + 1)\right)^2 + \left(\ln(n + 1) - \frac{1}{n+1}\right)^2} =$$

$$\sqrt{n^2 - 2n + \ln(n + 1)^2 - \frac{2\ln(n+1)}{n+1} + 2}\,.$$

Одержуємо послідовність з загальним членом $\sqrt{n^2 - 2n + ln(n + 1)^2 - \frac{2\,ln(n+1)}{n+1} + 2}$.

Задача 9. Скласти ряд величини послідовності відстаней між точками $\{c_{n+1}\}\ \{d_{n+1}\}$.

Розв'язання:

Координати точок c_{n+1} відповідають членам послідовності $x_{n+1} = \frac{1}{n+1}$, $y_{n+1} = n + 1$, а d_{n+1} — $x_{n+1} = \frac{1}{n+1}$, $y_{n+1} = \ln(n + 1), \forall\, n \in \mathbb{N}$.

Далі використаємо формулу обчислення відстані між точками в системі координат OXY:

$$\left|\overline{c_{n+1}d_{n+1}}\right| = \sqrt{\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+1}\right)^2 + (\ln(n+1) - (n+1))^2} = \ln(n+1) - n - 1.$$

Одержуємо послідовність з загальним членом $\ln(n+1) - n - 1$.

Задача 10. Скласти ряд величин площ послідовності фігур $\{a_{n+1}a_{n+2}b_{n+1}b_{n+2}\}$.

Розв'язання:

Координати точок a_{n+1} відповідають членам послідовності $x_{n+1} = n + 1$, $y_{n+1} = \frac{1}{n+1}$, а a_{n+2} — $x_{n+2} = n + 2$, $y_{n+2} = \frac{1}{n+2}$, координати точок b_{n+1} відповідають членам послідовності $x_{n+1} = n + 1$, $y_{n+1} = \ln(n + 1)$, а b_{n+2} — $x_{n+2} = n + 2$, $y_{n+2} = \ln(n + 2)$, де $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

Тепер давайте обчислимо площу криволінійної трапеції для кожного відрізка $a_{n+1}a_{n+2}b_{n+1}b_{n+2}$. Площа трапеції між точками $a_{n+1}a_{n+2}$ буде:

$$S_{a_{n+1}a_{n+2}} = \frac{1}{2}(x_{n+1} + x_{n+2}) \cdot (y_{n+2} - y_{n+1}).$$

Площа трапеції між точками $b_{n+1}b_{n+2}$ буде:

$$S_{b_{n+1}b_{n+2}} = \frac{1}{2}(x_{n+1} + x_{n+2}) \cdot (y_{n+2} - y_{n+1}).$$

Тепер, загальна площа трапеції між точками $a_{n+1}b_{n+2}$ буде:

$$S = S_{a_{n+1}a_{n+2}} + S_{b_{n+1}b_{n+2}}.$$

Підставимо значення та спростимо вираз для площі загальної трапеції.

$S = S_{a_{n+1}a_{n+2}} + S_{b_{n+1}b_{n+2}} = \frac{1}{2}(x_{n+1} + x_{n+2}) \cdot (y_{n+2} - y_{n+1}) + \frac{1}{2}(x_{n+1} + x_{n+2}) \cdot (y_{n+2} - y_{n+1}) = \frac{1}{2}(n + 1 + n + 2) \cdot \left(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+1}\right) + \frac{1}{2}(n + 1 + n + 2) \cdot (ln(n + 2) - ln(n + 1)) = -\frac{2n+3}{2n^2+6n+4} + \frac{2\ln(n+2)\cdot n + 3\ln(n+2) - 2\ln(n+1)\cdot n - 3\ln(n+1)}{2}$

Якщо учень ліцею або студент фізико-математичного факультету педагогічного університету пам'ятає формулу знаходження площі криволінійної трапеції через інтегральне числення, то з легкістю розв'яже наступну рівність:

$S=\int_{n+1}^{n+2}\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)dx+\int_{n+1}^{n+2}(ln(n+1)-ln(n+2))dx = \left(\frac{x}{n^2+3n+2}\right)\Big|_{n+1}^{n+2}+ (ln(n+1)\cdot x-ln(n+2)\cdot x)\Big|_{n+1}^{n+2}=\frac{1}{n^2+3n+2}+ln(n+1)\cdot(n+2)-ln(n+2)\cdot (n+2)-\ ln(n+1)\cdot(n+1)-ln(n+2)\cdot(n+1)=$

$$\frac{1+(n^3+5n^2+8n+4)\cdot\ln(n+1)+(-n^3-5n^2-8n-4)\cdot\ln(n+2)+(-n^3-4n^2-5n-2)\cdot\ln(n+1)+(-n^3-4n^2-5n-2)\cdot\ln(n}{n^2+3n+2}$$

Задача 11. Скласти ряд величин площ послідовності фігур $\{n+1, n+2, a_{n+2}a_{n+1}\}$.

Задача 11 розв'язується аналогічним шляхом.

Задача 12. Скласти ряд величин площ послідовності прямокутних трапецій $\{n, n+1, c_{n+1}c_n\}$.

Розв'язання:

Координати точок c_{n+1} відповідають членам послідовності $x_{n+1}=\frac{1}{n+1}$, $y_{n+1}=n+1$, координати точок c_n відповідають членам послідовності $x_n=\frac{1}{n}$, $y_n=n$, де $\forall\ n\in\mathbb{N}$.

Якщо учень ліцею або студент фізико-математичного факультету педагогічного університету пам'ятає формулу знаходження площі криволінійної трапеції через інтегральне числення, то з легкістю розв'яже наступну рівність:

$S=\int_{\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n+1}}((n+1)-(n+1))dy=0$

Задача 13. Скласти ряд величин площ послідовності прямокутних трапецій (пов'язаних з графіком функції $y=\frac{1}{x}$) $\{n, n+1, c_{n+1}c_n\}$.

Задача 13 розв'язується аналогічним шляхом.

Задача 14. Скласти ряд величин площ послідовності криволінійних трапецій $\{n+1, n+2, b_{n+1}b_{n+2}\}$.

Розв'язання:

Координати точок b_{n+1} відповідають членам послідовності $x_{n+1}=n+1$, $y_{n+1}=\ln(n+1)$, а b_{n+2} — $x_{n+2}=n+2$, $y_{n+2}=\ln(n+2)$, де $\forall\ n\in\mathbb{N}$.

Якщо учень ліцею або студент фізико-математичного факультету педагогічного університету пам’ятає формулу знаходження площі криволінійної трапеції через інтегральне числення, то з легкістю розв’яже наступну рівність:

S=$\int_{n+1}^{n+2}(ln(n+1)-ln(n+2))dx$=$(ln(n+1)\cdot x-ln(n+2)\cdot x)|_{n+1}^{n+2}= ln(n+1)\cdot(n+2)-ln(n+2)\cdot(n+2)- ln(n+1)\cdot(n+1)-ln(n+2)\cdot(n+1)$.

Можливості використання розглянутої геометричної моделі (рис. 1) для створення задач на числові послідовності не вичерпуються розглянутими задачами 1−14. Наприклад, модель можна доповнити:

- Скласти ряд величин відстаней між точками на кривій у=e^{-n}при n від 0 до нескінченності.
- Скласти ряд величин відстаней між точками на кривій $y=\frac{1}{n}$ при n від 1 до нескінченності.
- Скласти ряд величин відстаней між точками на кривій $\mathrm{y}=\ln(n)$ при n від 1 до 10.
- Скласти ряд величин площ прямокутних трапецій між графіками функцій $y=\frac{1}{n}$ та $\mathrm{y}=\ln(n)$ при n від 1 до 10.

Висновки та перспективи подальших пошуків у напрямі дослідження. Наші дослідження у сфері створення та аналізу числових послідовностей та рядів, базованих на геометричних моделях функцій $y=ln\,x$; $y=\frac{1}{x}$; $y = x^n$, дають можливість розробляти системи задач, спрямованих на розширення процесу навчання учнів ліцеїв та студентів вищих навчальних закладів.

Список використаної літератури

1. Бобирь В. Д., Христюк А. М. (2019). Реалізація дидактичного принципу наочності при вивченні числових рядів. X Міжнародна конференція молодих вчених «Молоді вчені 2019 – від теорії до практики» (7 березня 2019 р., Дніпро). (Bobyr V. D., Hrystiuk A. M. (2019). Implementation of the didactic

principle of visuality in the study of number series. 10th International Conference of Young Scientists "Young Scientists 2019 – from Theory to Practice" (Mar. 7, 2019, Dnipro). Dnipro.

2. Дзигарська Н. С., Корольський В. В., Тураєва О. В.(2022). Генерація числових рядів з використанням послідовностей геометричних об’єктів, вписаних у квадрат з параметром $a = 1$ в системі координат Oxy. Наукові записки молодих учених № 10. (Dzyharska N. S., Korolskiy V. V., Turaieva O. V. (2022). Generation of numerical series using sequences of geometric objects inscribed in a square with parameter $a = 1$ in the Oxy coordinate system. Scientific notes of young scientists № 10).

3. Корольський В. В., Габ С. С. (2018). Лінійна, квадратурна та куботурна геометрична інтерпретація числових рядів засобами моделювання. Новітні комп’ютерні технології: науково-методичний збірник. Том XVI. Кривий Ріг (сс. 67-73). (Korolskiy V. V., Gab S. S. (2018). Linear, quadrature and cuboidal geometric interpretation of numerical series by means of modeling. Latest computer technologies: scientific and methodical collection Volume XVI. Kryvyi Rih (pp. 67-73)).

4. Корольський В. В. Габ С. С. (2018). Числові ряди, які пов’язані з параметрами додекаедра. Вісник міжнародного дослідницького центру «Людина: мова, культура, пізнання»: науковий журнал, В. В. Корольський (ред.). Том 42. Кривий Ріг (сс. 39-45). (Korolskiy V. V., Gab S. S. (2018). Numerical series related to the parameters of the dodecahedron. Bulletin of the International Research Center "Man: Language, Culture, Cognition": scientific journal, V. V. Korolskiy (Ed.). Volume 42. Kryvyi Rih (pp. 39-45)).

5. Корольський В. В. (2017). Геометрична інтерпретація числових рядів. Новітні комп’ютерні технології: науково-методичний збірник. Том XV. Кривий Ріг (сс. 57-63). (Korolskiy V. V. (2017). Geometric interpretation of numerical series. Latest computer technologies: scientific and methodical collection Volume XV. Kryvyi Rih (pp. 57-63)).

6. Корольський В. В. (2018). Геометрична інтерпретація числового ряду арифметичної прогресії. Новітні комп'ютерні технології: науково-методичний збірник. Том XVI. Кривий Ріг (сс. 59-66). (Korolskiy V. V. (2018). Geometric interpretation of a numerical series of arithmetic progression. Latest computer technologies: scientific and methodical collection Volume XVI. Kryvyi Rih (pp. 59-66)).

7. Корольський В. В., Римар А. І. (2022). Геометрична інтерпретація числових рядів, пов'язаних з державною символікою. Збірник наукових праць «Актуальні питання природничо-математичної освіти». Випуск 2(20) (сс. 29-38). (Korolskiy V. V., Rymar A. I. (2022) Geometric interpretation of numerical series associated with state symbols. Collection of scientific works «Topical issues of natural science and mathematics education». Issue 2(20) (pp. 29-38)).

8. Корольський В. В., Тураєва О. В. (2023). Генерація та дослідження числових рядів за допомогою геометричної моделі та комбінації рядів $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ і $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+1}$. Збірник наукових праць «Актуальні питання природничо-математичної освіти». Випуск 1 (21) (сс. 46-54). (Korolskiy V. V., Turaieva O. V. (2023) Generation and investigation of number series using geometric model and combination of series $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ and $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+1}$. Collection of scientific works «Topical issues of natural science and mathematics education». Issue 1 (21) (pp. 46-54)).

9. Корольський В. В., Шокалюк С. В., Мельниченко Ю. А. (2018). Теоретико-методичні засади геометричного моделювання числових рядів. Фізико-математична освіта. Випуск 4(18) (сс. 81-89). (Korolskiy V. V., Shokaluk S. V., Melnychenko Y. A. (2018). Theoretical and methodological foundations of geometric modeling of numerical series. Physical and mathematical education. Issue 4(18) (pp. 81-89)).

10. Романова А. М. Генерація числових рядів та дослідження їх на збіжність: кваліфікаційна робота ступеня вищої освіти магістр, спеціальності 014.04 Середня освіта (Математика) / А. М. Романова: наук. керівник В. В. Корольський. – Кривий Ріг, 2019. – 90 с.