УДК 37.016:51

ПОХІДНА ТА ЇЇ ЗАСТОСУВАННЯ

Захватихата Єлизавета

Науковий керівник: кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри математики та цифрових технологій Яременко Ю.В.

Центральноукраїнський державний університет імені Володимира Винниченка, м. Кропивницький, Україна

У статті висвітлено актуальність вивчення теми «Похідна та її застосування» як однієї з основних тем в шкільному курсі алгебри та початків аналізу старшої школи. Представлені різні види завдань на тему: «Похідна та її застосування» з розробки уроків для 10 класів різних профілів .

Ключові слова: *похідна, застосування похідної, навчання, математичні дисципліни.*

The derivative and its application

Ye. Zakhvatykhata

Scientific supervisor: candidate of physical and mathematical sciences, associate professor of the department of mathematics and digital technologies Yaremenko Y. V.

Volodymyr Vynnychenko Central Ukrainian State University, Kropywnytsky, Ukraine

The article highlights the relevance of studying the topic "Derivative and its application" as one of the main topics in the school course of algebra and the beginnings of analysis in high school. Different types of tasks are presented on the topic: "Derivative and its application" for the development of lessons for 10 classes of different profiles.

Keywords: *derivative; application of the derivative; education; mathematical disciplines.*

Постановка проблеми. Поняття похідної функції є одним із основних понять математичної науки, зокрема диференціального числення. Похідна функції має величезну кількість застосувань не лише в математиці при дослідженні функцій та побудові їх графіків, при розв’язуванні рівнянь та нерівностей тощо, але й в інших прикладних науках. Як відомо, до поняття похідної функції приводять класичні задачі, що демонструють її застосування у механіці (задача про миттєву швидкість) та геометрії (задача про дотичну до кривої). До того ж розв’язування численних задач природознавства (про популяцію, про швидкість хімічної реакції тощо) часто не можливе без диференціального числення.

Не випадково вивчення похідної та її застосувань у старшій школі забезпечує реалізацію прикладної спрямованості шкільного курсу математики, що є важливою метою сучасного навчання у старшій профільній школі (10-11 класи). Зауважимо, що в майбутньому, відповідно до концепції Нової української школи, планується реалізувати профільну середню освіту у 10-12 класах, яка буде базуватися на різних прикладних застосуваннях математичних теорій, зокрема й диференціального числення.

Аналіз досліджень і публікацій. Методичними проблемами вивчення функціональної змістової лінії та диференціального числення у шкільному курсі математики займалися такі методисти, як Г.П. Бевз, М.І. Бурда, О.С. Дубинчук, М.І. Жалдак, Т.В. Колесник, І.В. Калашніков, В.К. Кірман, І.В. Лов'янова, Г.О. Михалін, А.О. Новікова, Є.П. Нелін, С.А. Раков, З.І. Слєпкань, Л.О. Соколенко, Н.А. Тарасенкова, Т.М. Хмара, Л.О. Швай, В.О. Швець, М.І. Шкіль, Н.М. Шунда та інші.

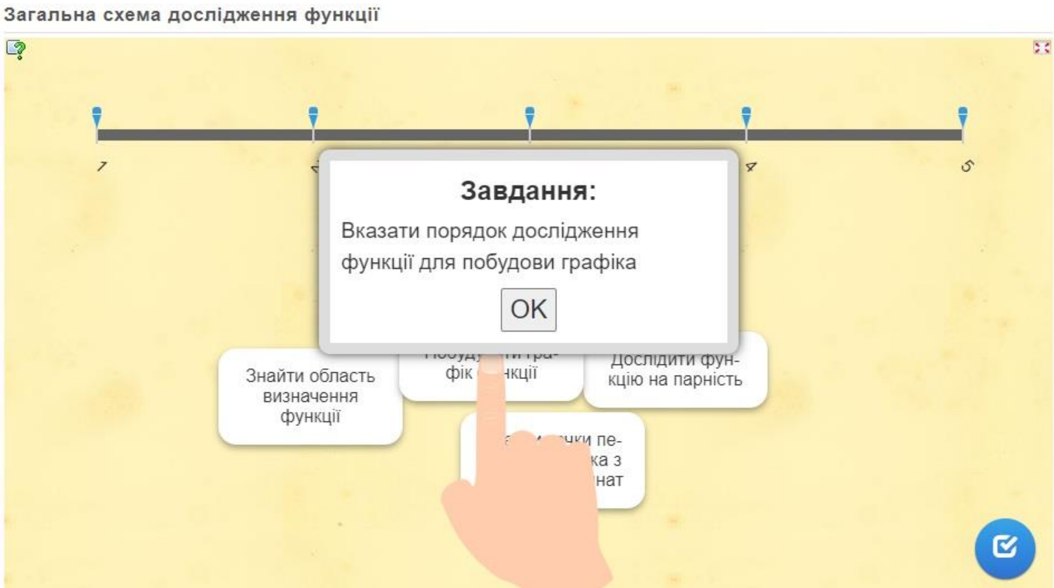
Аналіз сучасних навчальних програм та діючих шкільних підручників з математики для старшої школи з теми «Похідна та її застосування» показав, що дана тема викладається по-різному для різних профільних рівнів. Причому, різниця є як у змістовому наповненні, так і у вимогах до знань, навичок та умінь старшокласників. Крім того, завдання на застосування похідної зустрічаються на ЗНО (НМТ) з математики.

Мета статті: обґрунтувати теоретичні та методичні особливості профільного навчання старшокласників у процесі вивчення теми «Похідна та її застосування»; визначити місце задач на застосування похідної у завданнях ЗНО (НМТ); розробити конспекти уроків для класів різних профілів за даною тематикою.

Виклад основного матеріалу (результатів) дослідження. Найбільше уваги у даному дослідженні приділено аналізу методичних особливостей вивчення похідної та її застосувань. У роботі також представлена розробка уроків для 10 класів різних профілів, зокрема: урок з теми «Геометричні застосування похідної» для класів соціально-гуманітарного та філологічного профілів; урок з елементами дослідження за темою «Дослідження функцій та побудова графіків» для класів з поглибленим вивченням математики; урок для реалізації прикладної спрямованості з теми «Застосування похідної до розв'язування задач з біології та хімії» для класів хіміко-біологічного профілю; урок з елементами історизму за темою «Найбільше та найменше значення функції на відрізку» для класів фізико-математичного профілю.

Урок з алгебри та початків аналізу з поглибленим вивченням математики (з елементами дослідження)

Учням пропонується виконати інтерактивну вправу у додатку хмарному Learning Apps на повторення та закріплення загальної схеми дослідження функції (рис. 1) .



Коментоване розв'язування завдань. На кожен етап дослідження учні по черзі виходять до дошки. Один учень працює біля дошки, інші учні самостійно розв'язують завдання на своїх місцях.

Завдання: Дослідити функцію $y = \dfrac{x^2 + 2x + 10}{x - 3}$ та побудувати її графік [1].

Розв'язання.

1) Область визначення даної функції: $x - 3 \neq 0 \Rightarrow x \neq 3$, тобто

$D(y): x \in (-\infty;3) \cup (3;+\infty)$.

2) Оскільки область визначення не є симетричною відносно початку координат, то функція є ні парною, ні непарною.

Задана функція не періодична.

3) Знайдемо точки перетину з осями координат.

З рівняння $\dfrac{x^2+2x+10}{x-3}=0$

$\Rightarrow x^2+2x+10=0,\ D=2^2-4\cdot 10=4-40=-36<0$ – дійсних коренів немає, тобто немає точок перетину з віссю Ox.

При $x=0$, $y=-\dfrac{10}{3}$, отже $\left(0;-\dfrac{10}{3}\right)$ – це єдина точка перетину графіка функції з осями координат (з віссю Oy).

4) Визначимо проміжки знакосталості. Зауважимо, що квадратний тричлен у чисельнику $x^2+2x+10>0$, оскільки $D<0$, $a>0$.

$\dfrac{x^2+2x+10}{x-3}>0$ при $x>3$; $\dfrac{x^2+2x+10}{x-3}>0$ при $x<3$.

5) Для дослідження функції на монотонність (зростання і спадання) знайдемо її похідну:

$$y'=\left(\frac{x^2+2x+10}{x-3}\right)'=\frac{(2x+2)\cdot(x-3)-\left(x^2+2x+10\right)}{(x-3)^2}=$$

$$=\frac{2x^2-6x+2x-6-x^2-2x-10}{(x-3)^2}=\frac{x^2-6x-16}{(x-3)^2}.$$

$$y'=\frac{x^2-6x-16}{(x-3)^2}=0\Rightarrow x^2-6x-16=0,\ D=(-6)^2-4\cdot 1\cdot(-16)=36+64=$$

$$=100=10^2.$$

Тоді $x_1=\dfrac{6+10}{2}=8,\ x_2=\dfrac{6-10}{2}=-2.$

Отже, досліджуємо функцію на монотонність на проміжках з області визначення.

x	$(-\infty;-2)$	-2	$(-2;3)$	3	$(3;8)$	8	$(8;+\infty)$
y'	+	0	–	–	–	0	+
y	□	-2	□	–	□	18	□

Таким чином, $x=-2$ – точка локального максимуму, а $x=8$ – точка локального мінімуму. Тож, функція буде зростати на інтервалах $(-\infty;-2)$ і $(8;+\infty)$, а спадати на інтервалах $(-2;3)$ і $(3;8)$.

6) Для дослідження на опуклість графіка знайдемо другу похідну заданої функції:

$$y''=\left(\frac{x^2-6x-16}{(x-3)^2}\right)'=\frac{(2x-6)(x-3)^2-2(x-3)\left(x^2-6x-16\right)}{(x-3)^4}=$$

$$=\frac{(2x-6)(x-3)-2\left(x^2-6x-16\right)}{(x-3)^3}=\frac{2x^2-12x+18-2x^2+12x+32}{(x-3)^3}=\frac{50}{(x-3)^3}$$

$y''\neq 0, \forall x\in D(y)$, тож точок перегину немає. Більш того, із таблиці

x	$(-\infty;3)$	3	$(3;+\infty)$
y''	–	∞	+
y	$\cap$	∞	$\cup$

отримуємо, що на інтервалі $(-\infty;3)$ графік функції опуклий, а на інтервалі $(3;+\infty)$ – вгнутий.

7) Очевидно, функція є розривною у точці $x=3$ – це точка розриву другого роду, дійсно $\lim\limits_{x\to 3\pm 0}\dfrac{x^2+2x+10}{x-3}=\pm\infty$.

$x=3$ є вертикальною асимптотою.

Знайдемо усі інші асимптоти $y=kx+b$.

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{y(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2+2x+10}{x(x-3)}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2+2x+10}{x^2-3x}=$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2\left(1+\frac{2}{x}+\frac{10}{x^2}\right)}{x^2\left(1-\frac{3}{x}\right)} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1+\overset{\to 0}{\frac{2}{x}}+\overset{\to 0}{\frac{10}{x^2}}}{1-\underset{\to 0}{\frac{3}{x}}} = 1;$$

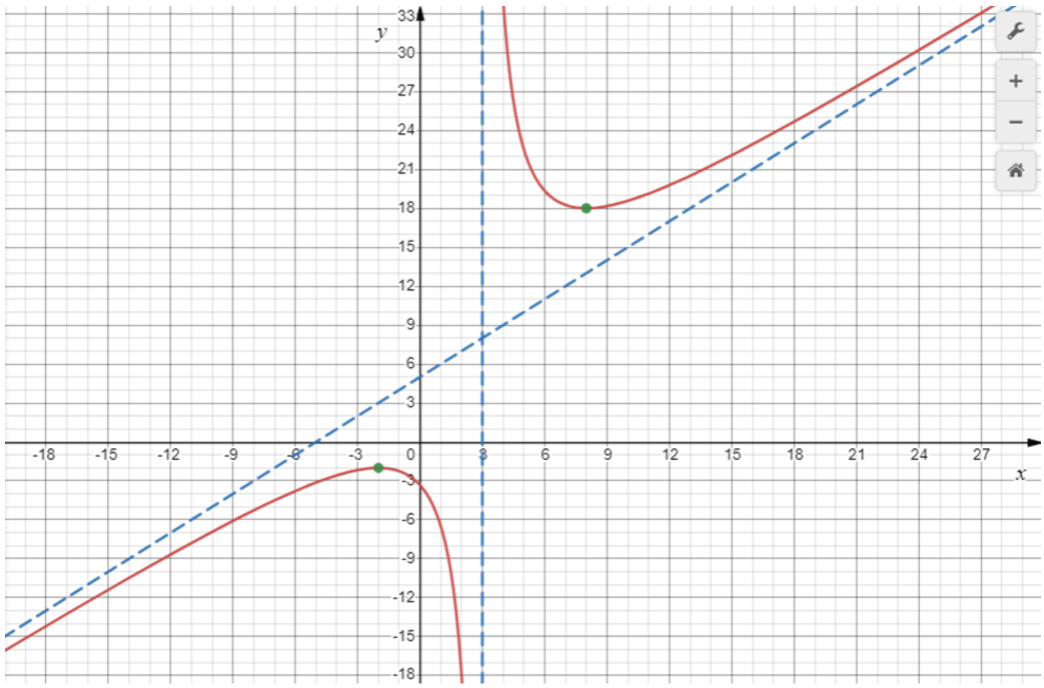
$$b = \lim_{x\to\pm\infty}\left(y(x)-kx\right) = \lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^2+2x+10}{x-3}-x\right) = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2+2x+10-x^2+3x}{x-3} =$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty}\frac{5x+10}{x-3} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{x\left(5+\frac{10}{x}\right)}{x\left(1-\frac{3}{x}\right)} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{5+\overset{\to 0}{\frac{10}{x}}}{1-\underset{\to 0}{\frac{3}{x}}} = 5.$$

Отже, $y = x+5$ – похила асимптота.

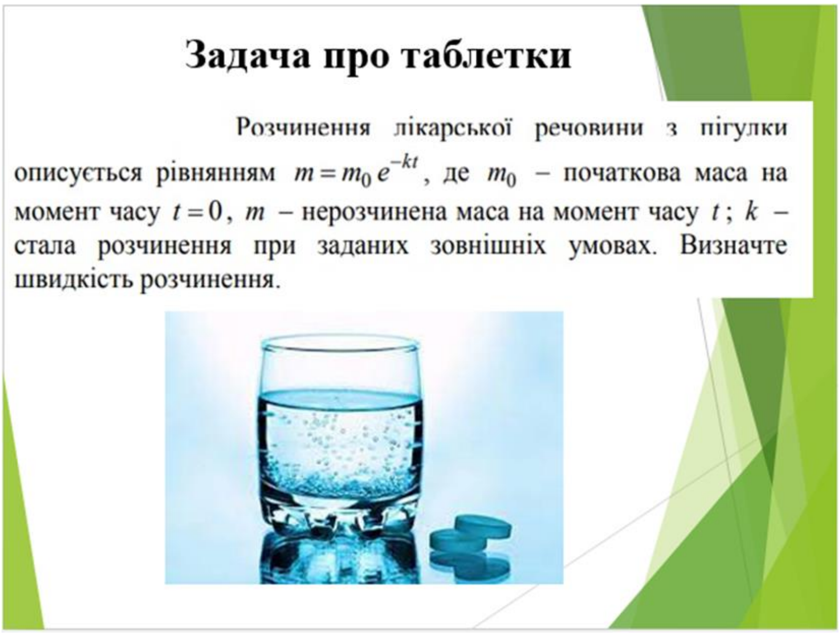
8) Побудуємо графік даної функції (рис. 2).

Учні виконують побудову вручну у власних зошитах. Вчитель будує графік у програмі Desmos, а потім результати перевіряють



Урок з алгебри та початків аналізу (профільний рівень, хіміко-біологічний профіль) (реалізація прикладної спрямованості)

Учням демонструється приклади завдань пов’язанні з хіміко-біологічним профілем [2].



Для розв’язання цієї задачі слід знати важливу формулу про масу лікарської речовини, що розчинилася у момент часу t:

$$M = m_0 - m = m_0\left(1 - e^{-kt}\right).$$

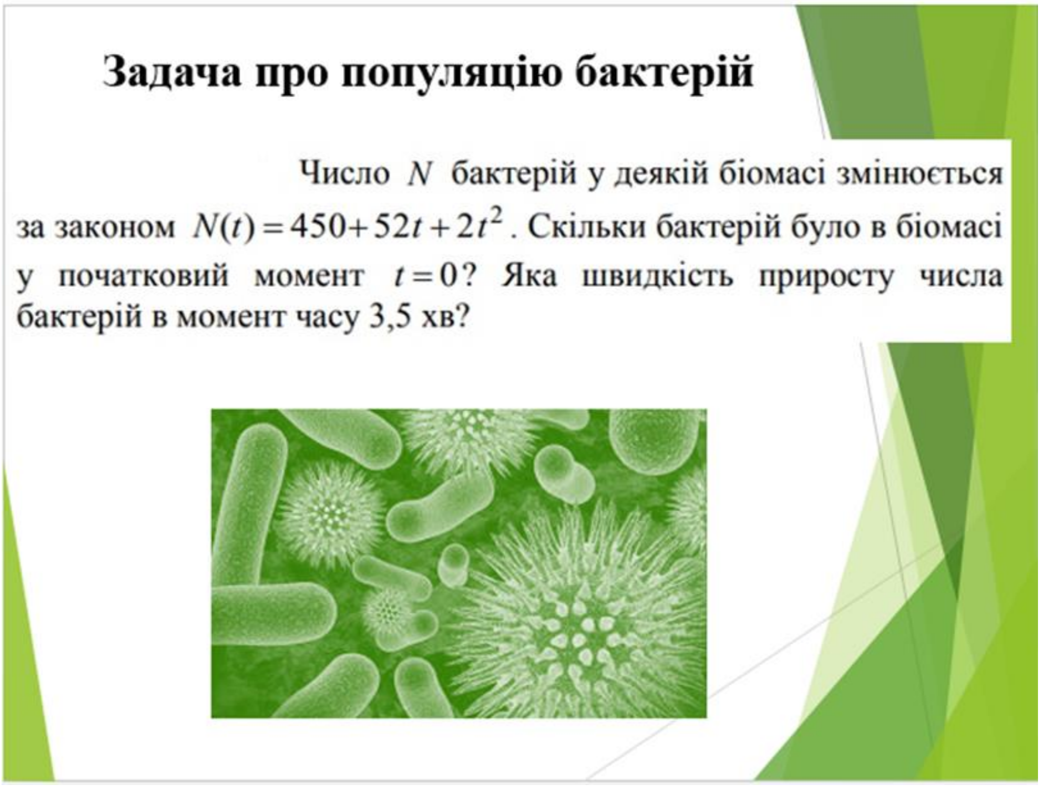
Застосовуючи хімічний зміст похідної, знайдемо швидкість розчинення таблетки: $M' = m_0\left(-e^{-kt}\right)\left(-k\right) = km_0e^{-kt} = km$.

Отже, km – швидкість розчинення лікарської речовини.

Обов’язково необхідно записувати відповідь до даної прикладної текстової задачі.

Відповідь: km – швидкість розчинення лікарської речовини.

Розв’яжемо задачу на застосування похідної у біології [2].



Почнемо розв'язання з того, що у початковий момент часу $t=0$ у біомасі було 450 бактерій.

Враховуючи, що швидкість приросту кількості живих мікроорганізмів таких як бактерії є похідною від всієї чисельності популяції бактерій, отже справедливою є формула $v(t)=N'(t)$, щоб знайти цю чисельність популяції необхідно використати правило знаходження похідної за 4-етапною схемою.

Вчитель з учнями повторює процес знаходження похідної за означенням (4-етапна схема).

1) Надаємо часу t приросту Δt.

2) Знаходимо приріст залежної змінної, відповідно до формули поданої в умові задачі:

$$\Delta N = N(t+\Delta t)-N(t)=450+52(t+\Delta t)+2(t+\Delta t)^2-\left(450+52t+2t^2\right)=$$

$$=52\Delta t+4t\Delta t+2(\Delta t)^2=\Delta t(52+4t+2\Delta t).$$

3) Побудуємо та знайдемо відношення:

$$\frac{\Delta N(t)}{\Delta t}=\frac{\Delta N}{\Delta t}=52+4t+2\Delta t.$$

4) Відповідно до означення похідної, знайдемо границю відношення приросту функції до приросту аргументу, коли приріст аргументу прямує до нуля:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta N}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \left(52 + 4t + 2\Delta t\right) = 52 + 4t .$$

Отже, у результаті отримали швидкість приросту кількості бактерій за певний час t.

За умовою задачі $t = 3,5$ хв, тому обчислимо швидкість:

$v = 52 + 4 \cdot 3,5 = 66$ (бакт/хв).

Запишемо відповідь до задачі.

Відповідь: $v = 66$ бакт/хв, в початковий момент часу 450 бактерій.

Висновки та перспективи подальших пошуків у напрямі дослідження. На мою думку, вивчення теми «Похідна та її застосування» є досить доступною, цікавою та важливою для вивчення учнями старших класів. Ця тема відкриває багато можливостей з співпраці з різними галузевими напрямками. Перед викладачем постає важливе завдання – навчити майбутніх фахівців застосовувати та розширювати математичні знання.

Список використаної літератури:

1. Жук І.В. Розвиток у старшокласників умінь виконувати наближені обчислення під час вивчення похідної. *Науковий часопис НПУ імені М.П. Драгоманова. Серія 3: Фізика і математика у вищій і середній школі*.– № 15.– 2015.– С. 33 – 39.
2. Соколенко Л.О., Філон Л.Г., Швець В.О. Прикладні задачі природничого характеру в курсі алгебри і початків аналізу: практикум. Навчальний посібник. Київ: НПУ імені М.П. Драгоманова, 2010.– 128 с.
3. Ачкан В.В., Ніколаєва О.В. Використання прикладних задач у процесі вивчення похідної у курсі алгебри та початків аналізу в класах різних профілів. *Збірник наукових праць Бердянського державного педагогічного університету (Педагогічні науки)*. Бердянськ: БДПУ, 2011. № 2.– С. 13-23.