УДК 373.5,016:512–023.722

ФОРМУВАННЯ МАТЕМАТИЧНОЇ КОМПЕТЕНТНОСТІ УЧНІВ ШЛЯХОМ ІНТЕГРАЦІЇ МЕТОДІВ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ АЛГЕБРАЇЧНИХ РІВНЯНЬ ТА ЇХ СИСТЕМ

Садовніченко Антон, Нічишина Вікторія

Науковий керівник: канд. пед. наук, доцент, доцент кафедри математики та цифрових технологій Нічишина В.В.

Центральноукраїнський державний університет імені Володимира Винниченка, м. Кропивницький, Україна

У статті розглядається процес інтеграції методів розв'язування алгебраїчних рівнянь та їх систем на уроках математики у профільних класах. Запропоновано застосування інтегративного підходу у процесі навчання математики з метою формування математичної компетентності учнів. Розв'язано серію нестандартних алгебраїчних рівнянь, рівнянь підвищеного рівня складності та їх систем шляхом інтеграції застосування властивостей функцій та їх графіків і використання можливостей графічного редактора Desmos.

Ключові слова: *інтеграція знань та методів, математична компетентність учнів, функції та їх графіки, алгебраїчні рівняння та їх системи, графічний редактор Desmos.*

Formation of students' mathematical competence through the integration of solution methods algebraic equations and their systems

A. Sadovnichenko, V. Nichyshyna

Scientific supervisor: Candidate of Pedagogic Science, associate professor of the department of mathematics and digital technologies Nichyshyna V.V.

Volodymyr Vynnychenko Central Ukrainian State University, Kropywnytsky, Ukraine

The article examines the process of integration of methods of solving algebraic equations and their systems in mathematics lessons in specialized classes. It is proposed to use an integrative approach in the process of teaching mathematics with the aim of forming students' mathematical competence. Solved a series of non-standard algebraic equations, equations of increased complexity and their systems by integrating the application of properties of functions and their graphs and using the capabilities of the Desmos graphic editor.

Keywords: *integration of knowledge and methods, mathematical competence of students, functions and their graphs, algebraic equations and their systems, graphic editor Desmos.*

Постановка проблеми. Головною метою сучасної школи визнано не тільки створення таких організаційно-педагогічних умов, завдяки яким учням буде приємно навчатися і отримувати знання, а й завдяки яким учні набуватимуть умінь застосовувати ці знання у повсякденному житті. Замість запам'ятовування фактів та понять учні набуватимуть систему компетентностей. Це – динамічна комбінація знань, умінь, навичок, способів мислення, поглядів, цінностей, інших особистих якостей, що визначає здатність особи успішно соціалізуватися, провадити професійну та/або подальшу навчальну діяльність. Тобто потрібно сформувати ядро знань, на яке будуть накладатись уміння цими знаннями користуватися, а також цінності та навички, що знадобляться випускникам української школи у професійному та приватному житті [10].

Тому метою роботи сучасного вчителя математики НУШ є формування в учнів ключових компетентностей, серед яких: математична компетентність та інформаційно-цифрова компетентність.

Одним із шляхів формування ключових компетентностей на уроках математики може бути інтеграція методів розв'язування математичних завдань, зокрема при розв'язуванні алгебраїчних рівнянь та їх систем. Відомо, що будь-яке рівняння можна розв'язувати аналітичним і графічним методами. Будувати графік функції або рівняння можна традиційним способом, а можна використовувати графічні редактори або інші програмні засоби (GeoGebra – динамічне геометричне середовище, яке дає можливість створювати «живі креслення», Desmos – графічний калькулятор тощо).

Аналіз досліджень і публікацій. Питання застосування інтеграції у навчальному процесі ЗЗСО вивчає багато сучасних науковців, серед яких вчителі, філософи, психологи. Основи реалізації інтегративного підходу в навчанні обгрунтовують науковці Кушнір В.А., Ріжняк Р.Я. [7]. Автори Ріжняк Р.Я., Пасічник Н.О., Завітренко Д., Акбаш К.С., Завітренко А. розглядають поняття «інтегративний образ» у навчанні математики [9]. Ботузова Ю.В., Нічишина В.В., Ріжняк Р.Я. у контексті інтегративного підходу аналізують поняття «наступність методів навчання розв'язування математичних задач у школі та закладі вищої освіти» [4]. Здійснювати внутрішньо предметну інтеграцію у навчанні математики в основній школі на прикладі інтеграції алгебраїчного та геометричного методів розв'язування задач пропонують автори Ботузова Ю. В. та Нічишина В. В. [5].

Нічишина В.В. та Ярова О.А. досліджували питання інтеграції змісту та нестандартних методів розв'язування задач з алгебри у старшій школі [8]. Вивченню питання інтегративного підходу у процесі фундаментальної підготовки з математики із застосуванням засобів інформаційно-комунікаційних технологій здобувачів освіти присвячені роботи Клочко В. І. [6].

Проте на сьогоднішній день існує потреба у дослідженні, яке б демонструвало розмаїття шляхів застосування інтеграції у процесі навчання математики учнів профільних класів.

Мета статті – розробити систему формування математичної компетентності у процесі навчання шляхом інтеграції методів розв'язування математичних завдань.

Виклад основного матеріалу (результатів) дослідження. Часто для розв'язування нестандартних алгебраїчних рівнянь та їх систем використовують властивості функцій та їх графіків. Зокрема, йдеться про область визначення та область значень функції; монотонність функції; парність та непарність функції.

Використання області визначення та області значень функції при розв'язуванні рівнянь

Приклад 1. Розв'язати рівняння: $|x| + |x - 1| = \frac{4x}{4x^2+1}$

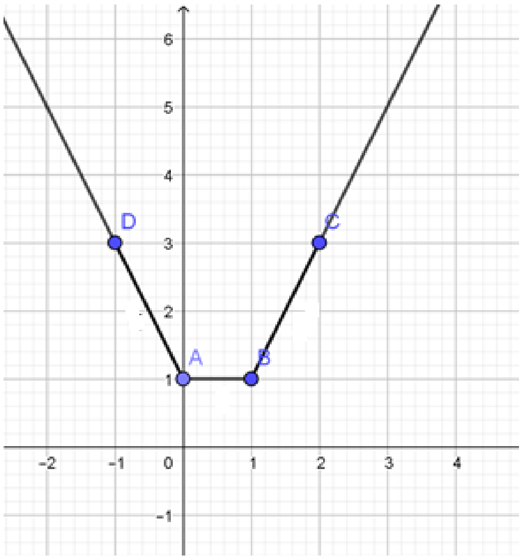
Розв'язання (аналітично):

Оскільки в обох частинах рівняння різні типи функцій, то треба дослідити область значень лівої та правої частин окремо – чи можлива ця рівність взагалі?

Розглянемо функцію $y = |x| + |x - 1|$. Враховуючи властивість модуля графік нашої функції буде складатися з трьох частин:

$$y = \begin{cases} -x + (-x+1) \text{ при } x < 0 \\ x + (-x+1) \text{ при } 0 \le x < 1 \\ x + (x-1) \text{ при } x \ge 1 \end{cases} \text{ тобто } y = \begin{cases} -2x+1 \quad \text{при } x < 0 \\ 1 \quad \text{при } 0 \le x < 1 \\ 2x-1 \text{ при } x \ge 1 \end{cases}$$

і графік функції буде таким:



Тоді можна зробити висновок, що $|x| + |x-1| \ge 1$.

Розглянемо праву частину рівняння: одразу зауважимо, що $\frac{4x}{4x^2+1} > 0$, отже $x > 0$, оскільки $|x| + |x-1| \ge 1 > 0$.

За нерівністю Коші маємо: $1 + 4x^2 \ge 2\sqrt{4x^2}$ тобто $1 + 4x^2 \ge 4x > 0$.

Звідси, за властивістю нерівностей: $\frac{1}{1+4x^2} \le \frac{1}{4x}$.

Домножимо обидві частини нерівності на 4x ($4x > 0$):

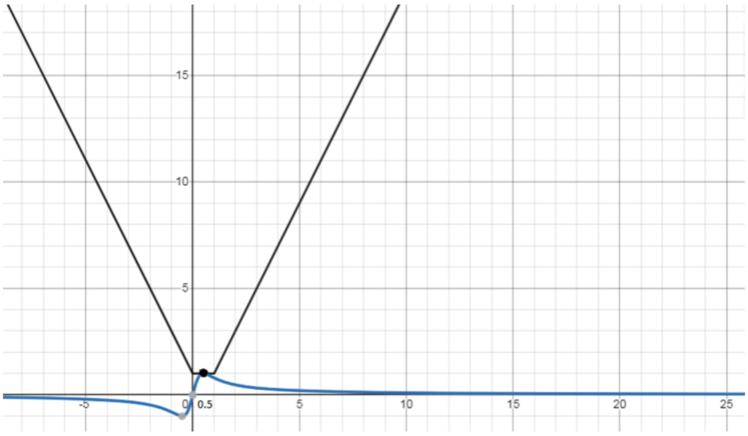
$\frac{4x}{1+4x^2} \le \frac{4x}{4x}$, а значить $\frac{4x}{1+4x^2} \le 1$. Отже, маємо, що $\frac{4x}{1+4x^2} \le 1 \le |x| + |x-1|$.

Тому рівність досягається, якщо кожен з цих виразів одночасно дорівнює 1, тобто маємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} \frac{4x}{1+4x^2} = 1 & (1) \\ 1 = |x| + |x-1| & (2) \end{cases}$$

Розв'яжемо більш просте рівняння (1): $4x^2 + 1 = 4x$; звідси $4x^2 - 4x + 1 = 0$; $(2x-1)^2 = 0$; $x = 0{,}5$; підставимо в (2) і просто перевіримо: $1 = 0{,}5 + 0{,}5$ (правильно). Отже $x = 0{,}5$ є коренем рівняння.

Побудуємо графіки функцій у графічному редакторі Desmos: $y = |x|+|x-1|$ і $y = \frac{4x}{4x^2+1}$



Маємо єдину точку перетину з абсцисою x = 0,5.

Відповідь: x = 0,5.

Приклад 2. Розв'язати рівняння $\sqrt{5-x} + \sqrt{x-3} = x^2 - 8x + 18$.

Розв'язання (аналітично):

І спосіб (за допомогою похідної):

Розглянемо функцію $y = \sqrt{5-x} + \sqrt{x-3}$.

ОВФ: $\begin{cases} 5-x \geq 0 \\ 3-x \geq 0 \end{cases}$ тобто $\begin{cases} x \leq 5 \\ x \geq 3 \end{cases}$, отже $x \in [3; 5]$.

Таким чином наша функція задана на проміжку $x \in [3; 5]$.

Знайдемо похідну функції:

$$y' = \frac{-1}{2\sqrt{5-x}} + \frac{1}{2\sqrt{x-3}} = \frac{\sqrt{x-3} - \sqrt{5-x}}{2\sqrt{5-x} * \sqrt{x-3}}$$

Прирівняємо похідну до нуля і отримаємо критичну точку x = 4.

Тоді знаходимо: y(3)=$2\sqrt{2}$; y(4)=2; y(5)= $2\sqrt{2}$.

Отже, $2 \leq \sqrt{5-x} + \sqrt{x-3} \leq 2\sqrt{2}$.

Можливі значення виразу $x^2 - 8x + 18$ отримаємо за допомогою виділення повного квадрату: $x^2 - 8x + 18 = (x-4)^2 + 2 \geq 2$

Звідси маємо систему:

$$\begin{cases} 2 = \sqrt{5-x} + \sqrt{x-3} & (1) \\ (x-4)^2 + 2 = 2 & (2) \end{cases}$$

Розв'яжемо друге рівняння, звідси x = 4, підставимо в перше для перевірки цього кореня, отримаємо 2 = 1 + 1 (правильно), тож x = 4 є коренем рівняння.

Відповідь: x = 4.

II спосіб (за допомогою нерівності Коші-Буняковського):

Розглянемо два набори чисел $(\sqrt{\mathbf{5}-x}; \sqrt{x-\mathbf{3}})$ і (1;1).

За нерівністю Коші-Буняковського отримаємо:

$$\sqrt{5-x} + \sqrt{x-3} \le \sqrt{\left(\sqrt{5-x}\right)^2 + \left(\sqrt{x-3}\right)^2} * \sqrt{1^2+1^2}$$

$$\text{отже, маємо} \quad \sqrt{5-x} + \sqrt{x-3} \le 2.$$

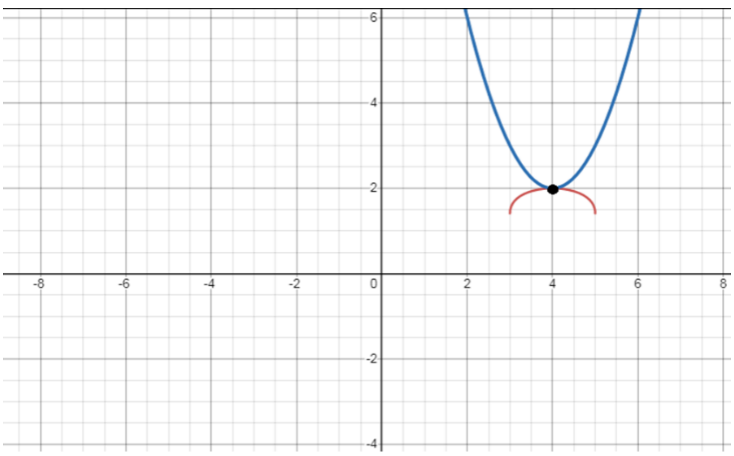
Можливі значення виразу $x^2 - 8x + 18$ отримаємо за допомогою виділення повного квадрату: $x^2 - 8x + 18 = (x-4)^2 + 2 \ge 2$ Звідси маємо систему:

$$\begin{cases} 2 = \sqrt{5-x} + \sqrt{x-3} & (1) \\ (x-4)^2 + 2 = 2 & (2) \end{cases}$$

Розв'яжемо друге рівняння, звідси x = 4, підставимо в перше для перевірки цього кореня, отримаємо 2 = 1 + 1 (правильно), тож x = 4 є коренем рівняння.

Побудуємо графіки функцій у графічному редакторі Desmos:

$y = \sqrt{5-x} + \sqrt{x-3}$ і $y = x^2 - 8x + 18$



Маємо єдину точку перетину з абсцисою x = 4.

Відповідь: x = 4.

<u>*Використання монотонності функції*</u>

<u>*при розв'язуванні рівнянь та їх систем*</u>

Приклад 3. Розв'язати рівняння $4x^3 + 3x\sqrt{4x-1} = 2$

Розв'язання (аналітично):

Знайдемо ОДЗ: $x \geq \frac{1}{4}$.

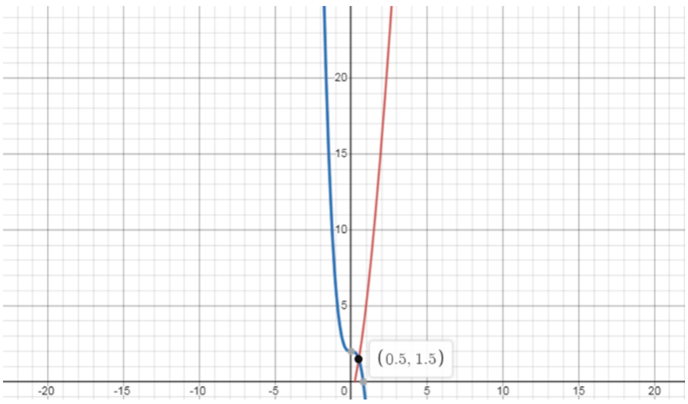
Розглянемо функції $y = 4x^3$; $y = 3x$; $y = \sqrt{4x-1}$ на отриманому проміжку $x \in \left[\frac{1}{4}; +\infty\right)$. Всі ці функції є монотонно зростаючими на даному проміжку, до того ж вони всі набувають невід'ємних значень, отже, і функція $y = 3x*\sqrt{4x-1}$ є монотонно зростаючою, а тоді і їх сума $y = 4x^3 + 3x*\sqrt{4x-1}$ є також монотонно зростаючою.

Отже, рівняння має вигляд f(x)=C, де y= f(x) є монотонно зростаючою, а C=2 – константа, тому це рівняння має не більше одного кореня, підбором знаходимо x = 0,5.

Перевіримо за допомогою графічного редактора Desmos.

Перепишемо рівняння у вигляді: $3x\sqrt{4x-1} = 2 - 4x^3$

Побудуємо графіки функцій у графічному редакторі Desmos: $y = 3x\sqrt{4x-1}$ і $y = 2 - 4x^3$



Маємо єдину точку перетину з абсцисою x = 0,5.

Відповідь: x = 0,5.

Приклад 4. Розв'язати систему:

$$\begin{cases} x - y = sinx - siny \\ 3x + 4y = 7 \end{cases}$$

Розв'язання (аналітично):

Зовнішній вигляд системи засвідчує, що стандартні методи розв'язування систем рівнянь не допоможуть, оскільки функції різних типів.

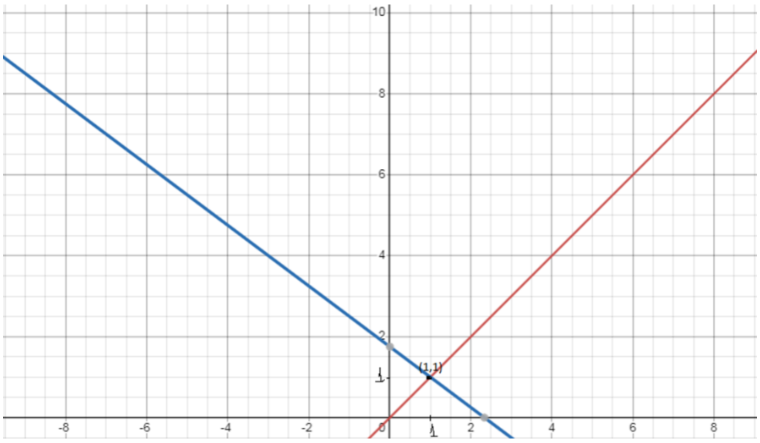
Перепишемо перше рівняння у вигляді: x – sin x = y – sin y. Розглянемо функцію $y = t - sin\,t$; $t \in (-\infty; +\infty)$. Похідна цієї функції $y' = 1 - cost \geq 0$; оскільки $cos\,t \in [-1; 1]$. Таким чином, функція $y = t - sin\,t$ є монотонно зростаючою при $t \in (-\infty; +\infty)$. Отже, перше рівняння має вигляд: f(x) = f(y), де функція y = f(t) є монотонно зростаючою при $t \in (-\infty; +\infty)$. Тоді маємо x = y.

Звідси маємо систему у спрощеному вигляді: $\begin{cases} x = y \\ 3x + 4y = 7 \end{cases}$.

Тож легко отримаємо, що x = 1, y = 1.

Перевіримо за допомогою графічного редактора Desmos.

Побудуємо графіки рівнянь у графічному редакторі Desmos: $x - y = sin\,x - sin\,y$ і $3x + 4y = 7$:



Маємо єдину точку перетину з координатами x = 1, y = 1.

Відповідь: (1; 1).

Розв'язування завдань ЗНО та олімпіадних завдань

Завдання №1. Розв'язати рівняння:

$$(3x - 1)\left(1 + \sqrt{(3x - 1)^2 + 2}\right) - 2x\left(1 + \sqrt{4x^2 + 2}\right) = 0$$

Розв'язання (аналітично):

Перепишемо дане рівняння у вигляді:

$$(3x-1)\left(1+\sqrt{(3x-1)^2+2}\right)=2x\left(1+\sqrt{4x^2+2}\right)$$

Розглянемо функцію $y=2t\left(1+\sqrt{t^2+2}\right)$, $t\in(-\infty;+\infty)$, дослідимо її на монотонність за допомогою похідної, а саме $y'=2+2\sqrt{t^2+2}+\frac{2t^2}{\sqrt{t^2+2}}>0$.

Отже, функція зростаюча на усій області визначення. Треба було помітити:

$(3x-1)\left(1+\sqrt{(3x-1)^2+2}\right)=f(3x-1)$

$2x\left(1+\sqrt{4x^2+2}\right)=f(2x)$

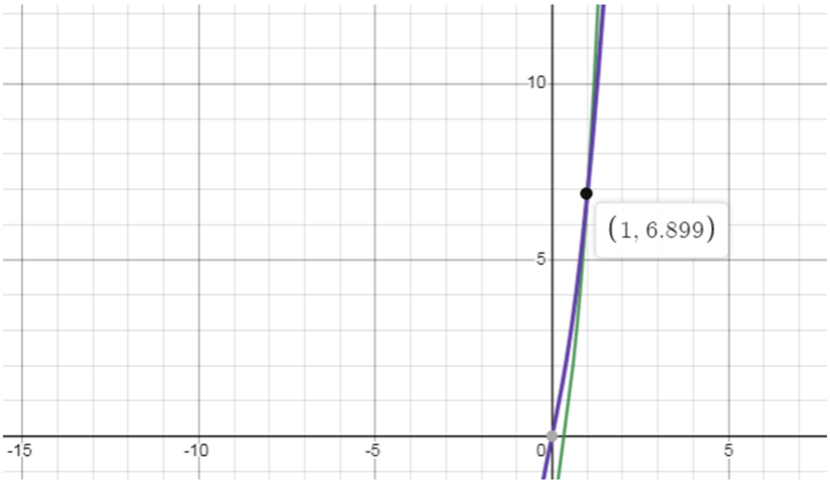
Тобто, фактично маємо рівняння $f(3x-1)=f(2x)$.

Враховуючи монотонність функції отримаємо, що $3x-1=2x$.

Отже, x = 1.

Перевіримо за допомогою графічного редактора Desmos.

Побудуємо графіки функцій у графічному редакторі Desmos: $y=(3x-1)\left(1+\sqrt{(3x-1)^2+2}\right)$ і $y=2x\left(1+\sqrt{4x^2+2}\right)$:



Маємо єдину точку перетину з абсцисою x = 1.

Відповідь: $x=1$.

Завдання №2. Розв'язати систему рівнянь:

$$\begin{cases}3-(y+1)^2=\sqrt{x-y}\\ x+8y=\sqrt{x-y-9}\end{cases}$$

Розв'язання (аналітично):

Почнемо з ОДЗ, отримаємо умови на підкореневі вирази:

$$\begin{cases}x-y\geq 0\\ x-y-9\geq 0\end{cases},\ \text{тоді}\ \begin{cases}x-y\geq 0\\ x-y\geq 9\end{cases},\ \text{отже}\ x-y\geq 9.$$

Помічаємо, що в першому рівнянні можна спробувати знайти область значень лівої частини. Так, $(y+1)^2\geq 0$, тоді $-(y+1)^2\leq 0$ та $3-(y+1)^2\leq 3$.

Що ж до $\sqrt{x-y}$? Враховуючи ОДЗ, отримаємо, що $x - y \geq 9$, тому $\sqrt{x-y} \geq 3$. Звідси отримаємо систему:

$$\begin{cases} 3-(y+1)^2 = 3 \\ \sqrt{x-y} = 3 \end{cases}$$

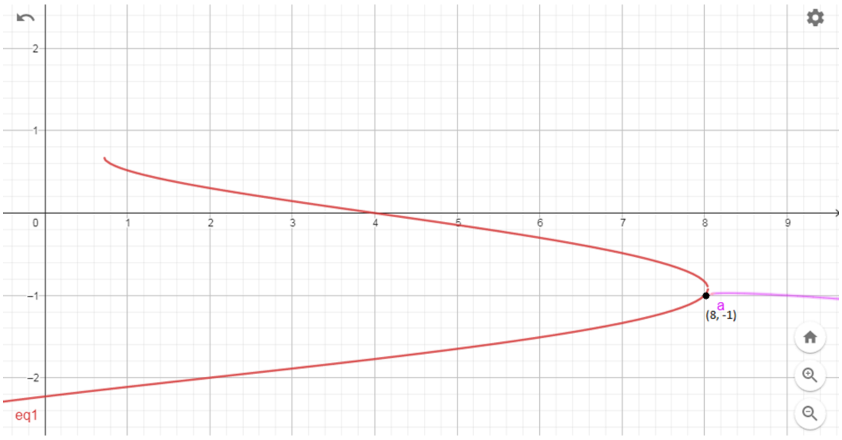
тоді маємо:

$\begin{cases} y = -1 \\ x - y = 9 \end{cases}$, тобто $\begin{cases} y = -1 \\ x = 8 \end{cases}$.

Перевіряємо підстановкою, чи задовільнять ці значення друге рівняння даної системи: $8 + 8 * (-1) = \sqrt{8-(-1)-9}$, дійсно 0 = 0 (правильно).

Перевіримо за допомогою графічного редактора Desmos.

Побудуємо графіки рівнянь у графічному редакторі Desmos: $3-(y+1)^2 = \sqrt{x-y}$ і $x + 8y = \sqrt{x-y-9}$:



Маємо єдину точку перетину з координатами x = 8, y = – 1.

Відповідь: (8; – 1).

Завдання №3. Розв’яжіть рівняння:

$$4^x - (19-3x)2^x + 34 - 6x = 0$$

Розв’язання(аналітично):

Нехай $2^x = t > 0$, тоді маємо рівняння $t^2 - (19-3x)t + 34 - 6x = 0$ $D = (19-3x)^2 - 4*1*(34-6x) = 9x^2 - 90x + 225 = (3x-15)^2$.

$t_1 = \frac{19-3x+(3x-15)}{2} = 2$, $\quad t_2 = \frac{19-3x-(3x-15)}{2} = \frac{34-6x}{2} = 17-3x$;

повернемося до заміни:

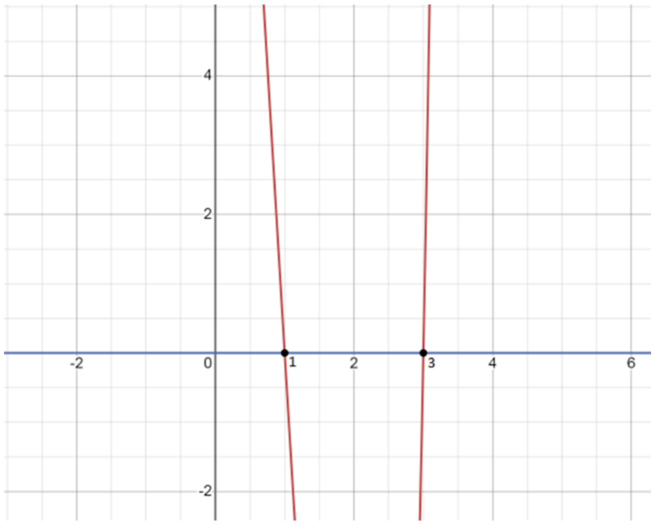
$$\left[\begin{array}{l} 2^x = 2 \\ 2^x = 17-3x \end{array}\right.$$

Звідси з першого рівняння маємо x = 1. А ось друге рівняння можна розв’язати двома способами – або графічно, або використовуючи властивості монотонної функції. А саме: $y = 2^x$ монотонно зростаюча функція при $x \in R$, а

$y = 17 - 3x$ монотонно спадна при $x \in R$, тому це рівняння має не більше одного кореня, який можна знайти підбором: x = 3.

Перевіримо за допомогою графічного редактора Desmos.

Побудуємо графіки функцій у графічному редакторі Desmos: $y = 4^x - (19 - 3x)2^x + 34 - 6x$ і $y = 0$:



Маємо дві точки перетину з абсцисами x = 1 та x = 3.

Відповідь: x=1; x=3.

Завдання №4. (м. Кропивницький, міська олімпіада з математики, 9 клас, 2022 рік). Розв’язати рівняння: $|x + 4| + |x| + |x – 4| = 8 – x^2$

Розв’язання (аналітично):

За властивістю модулів, а саме: $|a| + |b| \geq |a + b|$, отримаємо:

$|x + 4| + |x – 4| = |x + 4| + |4 – x| \geq |x + 4 + 4 – x| = 8$, оскільки $|x| \geq 0$, то $|x + 4| + |x| + |x – 4| \geq 8$.

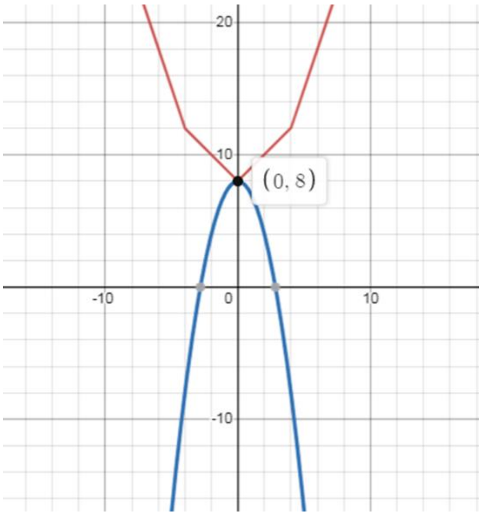
З іншої сторони $8 – x^2 \leq 8$, оскільки $x^2 \geq 0$ при усіх можливих значеннях x.

Тож можемо зробити висновок, що $\begin{cases} |x + 4| + |x| + |x - 4| = 8 \\ 8 - x^2 = 8 \end{cases}$.

З другого рівняння отримаємо x = 0 і підставимо в перше рівняння для перевірки: 4 + 0 + 4 = 8, 8 = 8 (правильно), таким чином x = 0 – корінь рівняння.

Перевіримо за допомогою графічного редактора Desmos.

Побудуємо графіки функцій у графічному редакторі Desmos: $y = |x + 4| + |x| + |x - 4|$ і $y = 8 - x^2$.



Маємо єдину точку перетину з абсцисою x = 0.

Відповідь: x = 0.

Завдання №5. Розв'язати рівняння: 3sin x – 4cos x = cos5x – 7.

Розв'язання (аналітично):

Спробуємо оцінити обидві частини рівняння:

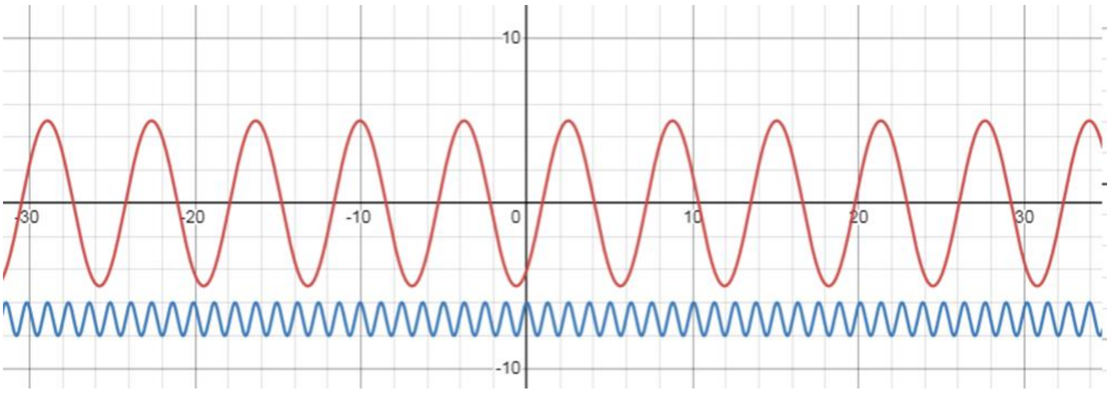
3sin x – 4cosx = 5*(0,6*sin x – 0,8*cos x) = 5*(cos t*sin x – sin t*cos x) = 5*sin(x-t), де $t = arctg\frac{0,8}{0,6} = arctg\frac{4}{3}$. Тоді отримаємо, що – 5 $\leq$ 5*sin (x – t) $\leq$ 5.

З іншого боку – 1 ≤ cos 5x ≤ 1, отже – 8 ≤ cos 5x – 7 ≤ – 6.

Звідси робимо висновок, що рівняння не має коренів, x ∈ ∅.

Перевіримо за допомогою графічного редактора Desmos.

Побудуємо графіки функцій у графічному редакторі Desmos: $y = 3\sin x - 4\cos x$ і $y = \cos 5x - 7$



Немає жодної точки перетину графіків функцій, отже x ∈ ∅.

Відповідь: x ∈ ∅.

Висновки та перспективи подальших пошуків у напрямі дослідження. Процес інтеграції методів розв’язування алгебраїчних рівнянь та їх систем на уроках математики в профільних класах є корисним як для розвитку аналітичних здібностей, так і для поглиблення навичок використання комп’ютерних (графічних) технологій, які можна застосовувати не лише для отримання розв’язку завдання окремо, а і як частини розв’язання, поєднаної з аналітикою.

При цьому учні набувають ряд необхідних для майбутнього життя компетентностей (математичну, інформаційно-цифрову) та навичок самоконтролю, співвідносять абстрактні розрахунки з їх візуальним представленням.

Таке комплексне представлення розв’язання допомагає учням співставити алгебраїчно подану функцію і її геометричний (графічний) вигляд. Маючи рисунок, учні можуть аналізувати функцію, декілька функцій, знаходити розв’язок рівнянь і перевіряти алгебраїчні підрахунки.

Крім того, корисніше розв’язати одну задачу декількома способами, ніж багато однотипних задач, оскільки такий підхід розвиває творче мислення на противагу шаблонності, дає змогу обрати раціональніше (найбільше оптимізоване за часом) розв’язання.

Отже, можна стверджувати, що інтеграція методів розв’язування алгебраїчних рівнянь та їх систем дозволяє формувати ключові компетентності учнів в процесі вивчення математики, є дієвим засобом для підвищення ефективності якості навчання в сучасних умовах.

Список використаної літератури

1. «Алгебра» для загальноосвітніх навчальних закладів з поглибленим вивченням математики: підруч. для 9 кл. закладів загальної середньої освіти / А.Г.Мерзляк та інші, Х. «Гімназія», 2017. – 416 с.
2. «Алгебра і початки аналізу: проф. рівень: підруч. для 10 кл. закладів загальної середньої освіти / А.Г.Мерзляк та інші, Х. «Гімназія», 2018. – 400 с.
3. «Алгебра і початки аналізу: проф. рівень: підруч. для 11 кл. закладів загальної середньої освіти / А.Г.Мерзляк та інші, Х. «Гімназія», 2019. – 352 с.

4. Ботузова Ю.В., Нічишина В.В., Ріжняк Р.Я. Наступність методів навчання розв’язування математичних задач у школі та закладі вищої освіти: контекст інтегративного підходу. *Фізико-математична освіта*. 2022. Випуск 4 (36). С. 16–25. DOI: https://doi.org/10.31110/2413-1571-2022-036-4-002.
5. Ботузова Ю. В., & НічишинаВ. В. (2023). Внутрішньопредметна інтеграція у навчанні математики основної школи (на прикладі інтеграції алгебраїчного та геометричного методів розв’язування задач). Наукові записки. Серія: Педагогічні науки, (210), 14 – 21. https://doi.org/10.36550/2415-7988-2023-1-210-14-21.
6. Клочко В. І. Інтегративний підхід у процесі фундаментальної підготовки з математики із застосуванням засобів інформаційно-комунікаційних технологій здобувачів вищої освіти / В. І. Клочко, О. В. Клочко, А. А. Коломієць // Science and education a new dimension. Natural and technical sciences. – Budapest, 2016. – IV(12), Issue 110. – P. 59 – 64.
7. Кушнір В.А., Ріжняк Р.Я. Інтегративний образ як форма реалізації інтегративного підходу в навчанні. Наукові записки. Випуск 99. Серія: Педагогічні науки. Кіровоград, РВВ КДПУ ім. В. Винниченка, 2011. – С. 9 –20.
8. Нічишина В.В., Ярова О.А. Інтеграція змісту та нестандартних методів розв’язування задач з алгебри у старшій школі / Наукові записки/ Ред. кол.: В.Ф. Черкасов, В.В. Радул, Н.С. Савченко та ін. – Випуск 173. Ч. 2.– Серія: Педагогічні науки. – Кропивницький: РВВ ЦДПУ ім. В.Винниченка, 2018. – С. 143 – 146.
9. Rizhniak, R., Pasichnyk, N., Zavitrenko, D., Akbash, K., Zavitrenko, A. (2021). The Implementation of an integrative Approach to Learning with use of integrated Images. *Revista Romaneasca Pentru Educatie Multidimensionala*. 13(1). https://doi.org/10.18662/rrem/13.1/373.
10. Сайт МОН України https://mon.gov.ua/ua/tag/nova-ukrainska-shkola.
11. Сарана О.А. Математичні олімпіади: просте і складне поруч /Тернопіль: “Навчальна книга-Богдан”, 2011.– 400 с.
12. Ясінський В.А. Задачі математичних олімпіад та методи їх розв’язування / Тернопіль: «Навчальна книга-Богдан», 2005.– 208 с.