УДК 373.5.016:519.87

# МЕТОДИКА ФОРМУВАННЯ УЯВЛЕНЬ ПРО МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ В УЧНІВ СТАРШОЇ ШКОЛИ

**Ярошевська Надія**

**Науковий керівник: канд. фіз.-мат. наук, доцент Віра М. Б.**

*Ніжинський державний університет імені Миколи Гоголя, м. Ніжин, Україна*

*У даній статті описано актуальність використання методу математичного моделювання у навчанні школярів при вирішенні практичних завдань. Розглянуто різні підходи до тлумачення поняття математичного моделювання та використання даного методу під час вирішення задач з практичної спрямованості. Виявлено доцільність додаткового навчання математичному моделюванню під час вирішення практико-орієнтованих завдань у межах курсу з математики. Подано методичні рекомендації щодо використання математичного моделювання.*

***Ключові слова:*** *практична спрямованість, завдання, розв'язання, методика, задача, математика, модель, математичне моделювання, задачі з практичним змістом, рівняння, учень, учитель, шкільний курс.*

**Methods of forming ideas about mathematical modeling in senior school students**

**N. Yaroshevska**

**Scientific supervisor: Candidate of Physics and Mathematics Sciences, Docent Vira M. B.**

*Mykola Gogol Nizhyn State University, Nizhyn, Ukraine*

*This article describes the relevance of using the mathematical modeling method in teaching schoolchildren when solving practical problems. Various approaches to the interpretation of the concept of mathematical modeling and the use of this method when solving practical problems are considered. The expediency of additional training in mathematical modeling during solving practice-oriented tasks within the mathematics course was revealed. Methodological recommendations on the use of mathematical modeling are given.*

***Keywords:*** *practical orientation, task, solution, method, problem, mathematics, model, mathematical modeling, problems with practical content, equation, student, teacher, school course.*

**Постановка проблеми.** Математика є універсальною мовою науки та практики. Вона знаходить застосування у багатьох сферах людської діяльності, і школярам важливо бути підготовленими до вступу в доросле життя, вміти справлятися з проблемами, які ставитиме перед ними навколишня дійсність. Тому вчителю важливо підготувати учнів знаходити варіанти та способи вирішення практико-орієнтованих завдань.

**Аналіз досліджень і публікацій.** У науковій літературі приділяється увага розкриттю сутності практико-орієнтованого підходу у навчанні. Так, Апанасов П. Т. визначає особливості зазначеного навчання, вказуючи, що воно передбачає єдність логічної та образно-емоційної складових змісту навчального процесу [1].

Існують дослідження, присвячені методичній підготовці вчителя математики, що стосуються реалізації практико-орієнтованого навчання в старшій школі, наприклад, Терьошин Н. О., Слєпкань З. І. [3, 4].

О. І. Чикунова, А. В. Бобровська у статті «Навчання методу математичного моделювання під час вирішення завдань із практичним змістом» наводять аналіз причин низького рівня математичної грамотності у сфері застосування математики до вирішення практичних завдань [7].

Проте роботи зазначених авторів не вичерпують поставленої проблеми. Таким чином, для реалізації практико-орієнтованого навчання доцільно поєднати навчання математики з новітніми способами викладання на базі загального принципу профільної спрямованості.

**Метою роботи** є дослідження розробки методики формування уявлень про математичне моделювання в учнів старшої школи.

*Об'єктом роботи* є дослідження процесу навчання математики в старшій школі.

*Предметом роботи* є дослідження методики формування уявлень про математичне моделювання.

**Виклад основного матеріалу (результатів) дослідження.** До основних цілей навчання математики відноситься формування умінь будувати математичні моделі найпростіших реальних явищ, досліджувати явища за заданими моделями, конструювати програми моделей; залучення учнів до творчої діяльності та формування у них вміння застосовувати її. У зв’язку з цим важливо познайомити їх із деякими найпростішими методами математики, і з головним методом – математичним моделюванням.

Даний метод особливо ефективний при вирішенні практико-орієнтованих завдань, оскільки учень навчається застосовувати математичні знання до практичних потреб, готується до практичної діяльності в майбутньому, вирішення завдань, що висуваються практикою, повсякденним життям. Рішення практико-орієнтованих завдань методом математичного моделювання привчає виділяти дані та невідомі, знаходити загальне та особливе у даних, зіставляти та протиставляти факти, робити висновки [5].

Математичне моделювання (англ. mathematical simulation, нім. mathematische Modellierung f) – метод дослідження процесів або явищ шляхом створення їхніх математичних моделей і дослідження моделей [2].

Математична модель – система математичних співвідношень, які описують досліджуваний процес або явище. Математична модель має важливе значення для таких наук, як: економіка, екологія, соціологія, фізика, хімія, механіка, інформатика, біологія та інше [2].

Для створення математичних моделей можна застосовувати будь-які математичні засоби – диференціальні або інтегральні рівняння, теорію множин, абстрактну алгебру, математичну логіку, теорію ймовірностей, графи та ін. Процес створення математичної моделі називається математичним моделюванням.

Великі можливості пропедевтики математичного моделювання надаються у старших класах. Старшокласникам слід повідомити триетапну схему математичного моделювання, особливості реалізації кожного етапу [8].

У першому етапі – етапі формалізації – здійснюється перехід від практичного завдання до його математичної моделі. Розкриваючи сутність першого етапу важливо звернути увагу на необхідність виділення істотних факторів, що впливають на явище, що вивчається, або виробничий процес.

На другому етапі – етапі дослідження побудованої моделі – вирішується математичне завдання, сформульоване на першому етапі. На цьому етапі важливе вміння перейти від однієї математичної моделі до іншої, знайти найбільш раціональний метод розв'язання.

На третьому етапі – етапі інтерпретації – отримане рішення математичного завдання перекладається на мову вихідної практичної задачі. Сутність третього етапу математичного моделювання полягає у вмінні дати правильне тлумачення математичного розв'язання задачі, виявити сутність часткових рішень, знайти практичні прийоми перевірки одержаного рішення, провести дослідження знайденого результату [9].

**Приклад 1.** Снаряд пущений із Землі з початковою швидкістю $v_0 = 30$ м/с під кутом $\alpha = 45^{\circ}$ до її поверхні. Знайдіть траєкторію його руху та відстань S між початковою та кінцевою точкою траєкторії.

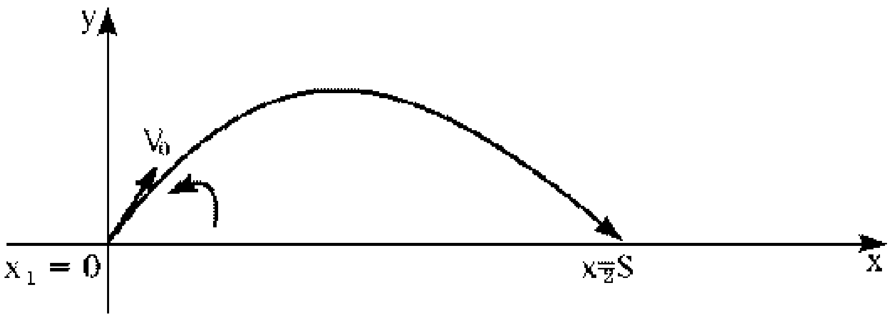


**Рис. 1**

Розв'язання:

Перш ніж приступити до складання математичної моделі даного завдання з учнями необхідно обговорити, що в процесі розв'язання задачі снаряд слід вважати матеріальною точкою, нехтуючи його розмірами.

Етап формалізації. Введемо систему координат $xOy$, поєднавши її початок з вихідною точкою, з якої пущений снаряд. Вісь x направимо горизонтально, а вісь y вертикально (рис. 1). Зі шкільного курсу фізики відомо, що снаряд описується формулами: $x = tv_0 \cos \alpha$, $y = tv_0 \sin \alpha - \frac{gt^2}{2}$, де t – час,

$g = 10$ м$/c^2$ – прискорення вільного падіння. Виражаючи t через x з першого рівняння, і підставляючи в друге, отримаємо: $y = x\tan\alpha - \frac{x^2 g}{2v_0^2(\cos\alpha)^2}$ (1). Рівняння (1) є математичною моделлю вихідного завдання механіки.

Етап дослідження збудованої моделі. Побудована крива (парабола) перетинає вісь x у двох точках $x_1 = 0$ (початок траєкторії) та $x_2 = S = \frac{v_0^2}{g}\sin 2\alpha$ (місце падіння снаряда). Підставляючи в отримані формули значення $v_0$ і α, отримаємо $y = x - 90x^2$, звідси $x = 0$ і $x = 90$.

Етап інтерпретації результатів. За умовою завдання необхідно було знайти відстань між початковою та кінцевою точкою траєкторії руху снаряда, тобто $S = 90$ м, а траєкторія руху снаряда описується рівнянням $y = x - 90x^2$.

Для наведеної задачі можна запропонувати учням дослідити залежність зміни траєкторії руху снаряда від початкової швидкості та кута під яким він буде пущений із Землі.

**Приклад 2.** Знайдіть висоту конуса найбільшого об'єму, який можна вписати в кулю радіусу R (рис. 2).

Розв'язання:

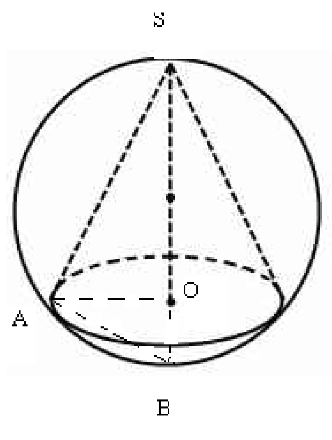


**Рис. 2**

Етап формалізації. Позначимо через r – радіус основи конуса, а через h – висоту конуса, тоді $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$. Продовжимо SO до перетину з поверхнею кулі в точці B і з'єднаємо її з A. Отримаємо $\Delta SAB$ – прямокутний, тому що $\angle SAB$ – спирається на SB, отже $AO^2 = SO * OB$. Звідси $r^2 = h(2R - h)$, тоді

$V = \frac{1}{3}\pi h^2(2R - h)$ (2). Вираз (2) є математичною моделлю наведеної геометричної задачі [6].

Етап дослідження збудованої моделі. Область визначення функції V, D(V): $h < 2R$. Знайдемо похідну функції V:

$$V' = \left(\frac{1}{3}\pi h^2(2R - h)\right)' = \frac{1}{3}(4Rh - 3h^2) = \frac{1}{3}\pi h(4R - 3h);$$

$$V' = 0;\ \frac{1}{3}\pi h = 0 \text{ або } 4R - 3h = 0;\quad h = 0 \text{ або } h = \frac{4R}{3}$$

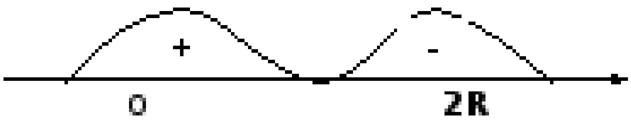


**Рис. 3**

Оскільки на заданому проміжку функція безперервна і має один екстремум $\frac{4R}{3}$ – точка максимуму, то в цій точці вона приймає найбільше значення.

Етап інтерпретації результатів. Виходячи зі знайденого рішення, робимо висновок, що висота конуса найбільшого об’єму дорівнює $\frac{4R}{3}$.

При навчанні математики в старшій школі слід розглядати виробничі завдання і застосовувані для їх вирішення математичні методи. Для ознайомлення учнів із сутністю таких методів доцільно використовувати елективні курси та позаурочні заняття з математики [9].

Найбільш поширеним методом, особливо в економіці, є метод лінійного програмування. Суть цього методу полягає у знаходженні екстремальних значень деякої функції, яка називається цільовою, при дотриманні низки умов, що являють собою систему лінійних рівнянь чи нерівностей, кількість яких перевищує кількість змінних. Розв’язувати задачі із застосуванням методу лінійного програмування можна як аналітично, так і графічно.

**Приклад 3.** Сільськогосподарське товариство займається вирощуванням двох культур – зернових і картоплі і має такі ресурси: рілля – 5 000 га, ручна праця – 300 000 людино-годин і можливий обсяг тракторних робіт – 28 000 умовних га. Мета виробництва – отримання найбільшого обсягу валової продукції (у вартісному виражені). Слід знайти оптимальне поєднання посівних площ культур, які вирощуються товариством.

Розв'язання:

Етап формалізації: для складання математичної моделі скористаємося нормативами витрат цього товариства.

**Таблиця 1**

| Культура | Витрати на 1 га посіву | | Вартість валової продукції 1 га, ум. од. |
|---|---|---|---|
| | Ручної праці, людино-годин | Тракторних робіт, умовних га | |
| Зернові | 30 | 4 | 400 |
| Картопля | 150 | 12 | 1000 |

Критерієм оптимальності є найбільше значення вартості валової продукції. Для пошуку оптимального рішення позначимо через $x_1$ га площу, що відводиться під зернові, а через $x_2$ га площу, що відводиться під картоплю.

Тоді вартість зернових становитиме $400x_1$ умовних одиниць, а вартість картоплі – $1000x_2$ умовних одиниць. Отже, загальна вартість валової продукції становитиме $(400x_1 + 1000x_2)$ умовних одиниць. Позначимо цю суму через у та назвемо отриманий вираз $y = 400x_1 + 1000x_2$ (3) цільовою функцією. Необхідно знайти найбільше значень цієї функції за дотримання таких умов:

a. Загальна площа зернових і картоплі не має перевищувати 5 000 га, тобто $x_1 + x_2 \leq 5000$; (4)

b. Загальні витрати ручної праці не повинні перевищувати 300 000 людино-годин, тобто $30x_1 + 150x_2 \leq 300\,000$; (5)

c. Загальний обсяг механізованих робіт не має перевищувати 28 000 умовних га, тобто $4x_1 + 12x_2 \leq 28\,000$; (6)

d. Площі, що відводяться під зернові і картоплю, можуть набувати лише невід'ємних значень, тобто $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$.

Таким чином, умова завдання виражається наступною системою нерівностей: $\begin{cases} x_1 + x_2 \le 5000 \\ 30x_1 + 150x_2 \le 300\,000 \\ 4x_1 + 12x_2 \le 28\,000 \\ x_1 \ge 0 \\ x_2 \ge 0 \end{cases}$ (7).

Потрібно знайти такі значення, при яких цільова функція $y = 400x_1 + 1000x_2$ (3) набуває найбільшого значення, що задовольняє системі нерівностей (7). Рівняння (3) – математична модель наведеної задачі, яку слід досліджувати на оптимальність.

На даному етапі слід звернути увагу школярів на те, що кількість нерівностей у системі (7) перевищує кількість змінних. Така ситуація для учнів практично нова.

Етап дослідження збудованої моделі. Розв'яжемо завдання графічно.

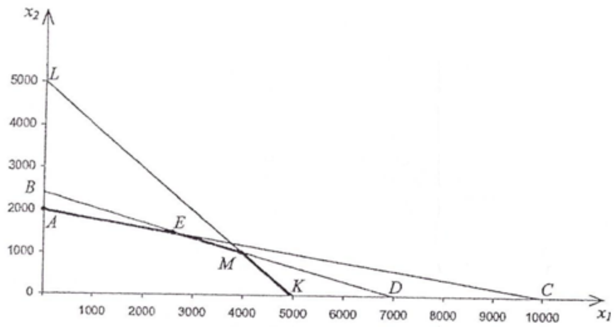


**Рис. 4**

Побудуємо пряму $x_1 + x_2 = 5000$. Координати всіх точок трикутника LOK задовольняють нерівність $x_1 + x_2 \le 5000$. Збудуємо пряму $30x_1 + 150x_2 = 300\,000$. Координати всіх точок трикутника AOC задовольняють нерівності $30x_1 + 150x_2 \le 300\,000$. Побудуємо пряму $4x_1 + 12x_2 = 28\,000$. Координати всіх точок трикутника BOD задовольняють нерівність $4x_1 + 12x_2 \le 28\,000$.

Нерівностям $x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$ задовольняють усі точки першої чверті координатної площини $x_1Ox_2$. Будь-яка точка багатокутника AEMKO відповідає системі нерівностей (7).

Для знаходження найбільшого значення цільової функції знайдемо значення у вершинах багатокутника AEMKO.

**Таблиця 2**

| Вершина | Координати вершини | Значення цільової функції, ум. од. |
|---|---|---|
| A | (0; 2 000) | 2 000 000 |
| E | (250; 1 500) | 2 500 000 |
| M | (4 000; 1 000) | 2 600 000 |
| K | (5 000; 0) | 2 000 000 |
| O | (0; 0) | 0 |

Таким чином, найбільше значення цільової функції досягається у вершині M, що відповідає варіанту плану, по якому під зернові відводиться 4 000 га, а під картоплю 1 000 га.

Етап інтерпретації результатів. Оптимальне поєднання посівних площ культур, що забезпечує отримання найбільшого обсягу валової продукції: зернові – 4 000 га, картопля – 1 000 га.

Крім методу лінійного програмування в класах природничого напряму та економічного профілю доцільно знайомити учнів із застосуванням методу найменших квадратів для вирішення нематематичних завдань, що застосовуються для прогнозування процесів, що протікають у різних галузях виробничої діяльності [8].

**Приклад 4.** Визначити перспективну врожайності сільськогосподарської культури.

Таке завдання вирішується у зв’язку з перспективним плануванням виробництва сільськогосподарської продукції. В основу вирішення цього завдання покладено математико-статистичні методи.

Етап формалізації. Перспективна врожайності визначається за формулою $y = a + bx$, (8) де a – вільний член рівняння, b – середнє щорічне збільшення врожайності, x – число років з початку відліку. Числові значення параметрів a та b знаходяться методом найменших квадратів з системи рівнянь

$$\begin{cases} a\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + bn = \sum_{i=1}^{n} y_i \\ a\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + b\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \end{cases} \quad (9)$$

Найбільша методична складність – розкриття сутності методу найменших квадратів [8]. Він полягає в наступному: з формули (8) перспективна врожайність – лінійна функція натурального аргументу x. Її графік – множина дискретних точок, що мають натуральні абсциси (рис. 5).

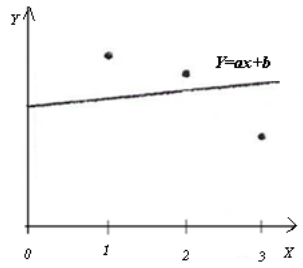


**Рис. 5**

Метод найменших квадратів може бути використаний для вирішення практичних завдань, пов’язаних із плануванням виробництва продукції, прогнозуванням її собівартості.

Включення математичного моделювання у освітній процес дозволяє активізувати пізнавальну діяльність школярів, формувати науковий світогляд та обчислювальні вміння і навички.

**Висновки та перспективи подальших пошуків у напрямі дослідження.** Вивчення математичної, навчально-методичної та психолого-педагогічної літератури, аналіз роботи вчителів та результати дослідної роботи дозволяють зробити такі висновки:

1. Реалізація прикладної спрямованості навчання математики сприяє формуванню уявлень про роль і місце математики в суспільстві, розвитку практичних умінь і навичок учнів.

2. Посилення прикладної спрямованості навчання математики полягає у наповненні абстрактних понять практичним змістом, демонстрації математичних методів як засобу пізнання навколишньої дійсності.

3. Одним із основних моментів у реалізації прикладної спрямованості навчання математики є відбір змісту навчального матеріалу, що сприяє формуванню наукового світогляду учнів. У зв’язку з цим необхідно:

- знайомити школярів з новими відомостями та фактами через практичні завдання, які показують рівень розвитку науки та техніки;
- розкривати перед учнями практичну значущість математичних фактів, методів та застосування їх у житті і професійній діяльності.

Результати проведеної дослідної роботи підтвердили, що розроблена методика реалізації прикладної спрямованості навчання математики в освітньому процесі дозволяє підвищувати якість знань учнів та рівень сформованості практичних умінь і навичок.

**Список використаної літератури**


1. Апанасов П. Т., Апанасов Н. П. Збірник математичних завдань із практичним змістом. – Кн. Для учителя. – М: Просвітництво, 1987. – 110 с.
2. Математичне моделювання. Вікіпедія: веб-сайт. URL: https://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%93%D0%BE%D0%BB%D0%BE%D0%B2%D0%BD%D0%B0_%D1%81%D1%82%D0%BE%D1%80%D1%96%D0%BD%D0%BA%D0%B0 (дата звернення 12.09.2023).
3. Слєпкань З. І. Методика навчання математики / З. І. Слєпкань. – К.: Вища школа, 2006. – 582 с.
4. Фрідман Л. М. Психолого-педагогічні засади навчання математики у школі / Л. М. Фрідман. – М.: Просвітництво, 1983. – 159 с.
5. Терьошин Н. О. Прикладна спрямованість шкільного курсу математики. – М.: Просвітництво, 1990. – 96 с.
6. Фоміних Ю. Ф. Прикладні завдання з алгебри. – М.: Просвітництво, 1999. – 136 с.
7. Чикунова О. І., Бобровська О.В. Навчання методу математичного моделювання під час вирішення завдань із практичним змістом. *Міжнародний журнал експериментального освіти*. 2016. № 1. С. 131 – 134.
8. Шапіро І. М. Використання завдань із практичним змістом у викладанні математики. – М.: Просвітництво, 1990. – 196 с.
9. Шапіро І. М. Прикладна спрямованість навчання математики. – М.: Просвітництво, 2003. – 86 с.