

УДК 377.5.315

ЛОГАРИФМИ НАВКОЛО НАС

Сліпченко Анастасія, Ключник Інна

**Науковий керівник: кандидат фізико-математичних наук, доцент
кафедри математики та цифрових технологій Ключник І.Г.**

*Центральноукраїнський державний університет імені Володимира
Винниченка, м. Кропивницький, Україна*

У статті висвітлено актуальність вивчення теми «Логарифмічні рівняння та нерівності» як однієї з основних тем в шкільному курсі алгебри та початків аналізу старшої школи. Показано практичне застосування показникової та логарифмічної функцій в різних сферах життя. На прикладах показано розв'язування задач з різних наук..

Ключові слова: логарифм; логарифмічне рівняння, логарифмічна нерівність.

Logarithms around us

Slipchenko Anastasiia, Inna Kliuchnyk

**Academic supervisor: candidate of physical and mathematical sciences, associate
professor of the department of mathematics and digital technologies Kliuchnyk I.G.**

*The Volodymyr Vynnychenko Central Ukrainian State University,
Kropywnytsky, Ukraine*

The article highlights the relevance of studying the topic “Logarithmic equations and inequalities” as one of the main topics in the school course algebra and the beginnings of analysis in high school. The practical application of exponential and logarithmic functions in various spheres of life is shown. The examples show how to solve problems from various sciences.

Keywords: logarithm, logarithmic equation, logarithmic inequality.

Постановка проблеми. У шкільному курсі математики важливе місце приділяється вирішенню показникових та логарифмічних рівнянь, нерівностей та їх систем. Вперше учні зустрічаються з показниковими та логарифмічними рівняннями та нерівностями у 11 класі, після того, як познайомляться з показниковими та логарифмічними функціями та їх властивостями. Вивчаючи дані теми, у здобувачів освіти завжди виникає

питання: «Нащо нам ця інформація, де вона в майбутньому знадобиться?». Тому детальне вивчення цієї теми буде дуже корисним та актуальним, оскільки показникові та логарифмічні функції використовуються в житті та науці.

Аналіз досліджень і публікацій. Для осмислення цілісності формування прийомів навчальної діяльності учнів з розв'язування рівнянь та нерівностей важливими є результати психологічних та педагогічних досліджень, досліджень методистів, пов'язаних з аналізом навчальної діяльності. Аналіз дидактичних особливостей формування знань і вмінь учнів, пов'язаних із розв'язуванням логарифмічних рівнянь та нерівностей, спирається на дослідження дидактичних закономірностей організації особистісно орієнтованого навчання (праці Ю.К. Бабанського, М.А. Данилова, Л.В. Занкова, І.Я. Лернера, В.І. Лозової, В.О. Оніщука, В.В. Серікова, М.Н. Скаткіна, А.В. Хуторського, З.І. Слєпкань та ін.)

Мета статті: розкриття важливих моментів процесу вивчення логарифмічних рівнянь і нерівностей в шкільному курсі математики. Застосування логарифмів в різних сферах науки.

Виклад основного матеріалу (результатів) дослідження. При оволодінні будь-якою сучасною професією потрібні певні математичні знання. Математичні знання стали особливо важливим компонентом загальної культури. Потрібна ґрунтовна математична підготовка для успішної життєвої самореалізації. Місце та роль математики в сучасній науці та житті суспільства, а також цінність математичних знань, зумовлюють цілі математичної освіти. Математика як наука, завжди ставить за мету полегшити і поліпшити життя людини, дізнатися більше про навколишній світ, пізнати і зрозуміти його закономірності і таємниці. Теоретики і практики, які займаються математикою, створюють математичну модель явищ, виділяючи у ній, найважливіші риси що у природі явищ, пов'язуючи їх між собою емпірично, з допомогою

запровадження математичних залежностей, а як і вводячи різні числові характеристики.

Одна із змістовних тем шкільного курсу алгебри – логарифмічні рівняння та нерівності. Вони містять безліч незвичайних, цікавих методів рішення, що розвивають раціональне мислення, пам'ять та пізнавальний інтерес у математики. Ця тема присутня у матеріалах ЄДІ (для базового та профільного рівнів), але у більшості учнів виникають проблеми з вивченням даної теми. Це дозволяє говорити про актуальність теми статті.

Трохи з історії логарифмів.

Слово «логарифм» походить від грецького слова *λογος* (число) та *αριθμος* (відношення), тобто, перекладається як «відношення чисел». Винайшов логарифми англійський математик Джон Непер в 1594 році.

Назва пояснюється тим, що логарифми виникли при зіставленні двох чисел, одне з яких є членом арифметичної прогресії, а інше – геометричної прогресії. Відкриття логарифмів зводило множення і ділення до операцій додавання і віднімання, піднесення до степеня до операції множення, а здобування кореня до операції ділення. Це значно полегшувало процес обчислення.

Так логарифми почали застосовувати практично у всіх сферах життя. Там, де треба було проводити обчислення з багатозначними числами або ж, де необхідна була точність до п'ятого знаку після коми, почали застосовувати логарифми. На практиці більш точні обчислення не використовуються. Вчені переконались в тому, що логарифми унікальні та здатні описати практично будь-яке фізичне явище.

Спробуємо і ми переконатися, що використовуються логарифми абсолютно у всіх науках і сферах життя. Розглянемо деякі приклади. Учні часто запитують, для чого вони вчать в школі той чи інший матеріал. Логарифмічна та показникова функції – дуже яскравий приклад застосування цих знань в житті.

Логарифми в біології.

Задача: В початковий момент часу було 8 бактерій. Через 2 години після поміщення бактерій в живильне середовище, їх число збільшилось до 100. Через скільки часу з моменту розміщення в живильне середовище можна очікувати появу 500 бактерій?

Розв'язання:

Для розв'язання цієї задачі слід згадати поняття швидкості і прискорення.

$$1 \text{ заміна: } \left. \begin{array}{l} \text{було} - 8 \\ \text{стало} - 100 \end{array} \right\} \Rightarrow 8^x = 100 \Rightarrow x = \log_8 100$$

$\log_8 100$ – кінцеве значення швидкості розповсюдження бактерій при першій зміні - $V_{\text{кін.1}}$

$$2 \text{ заміна: } \left. \begin{array}{l} \text{було} - 8 \\ \text{стало} - 500 \end{array} \right\} \Rightarrow 8^y = 500 \Rightarrow y = \log_8 500$$

$\log_8 500$ – кінцеве значення швидкості розповсюдження бактерій при першій зміні - $V_{\text{кін.2}}$

Складемо формулу для прискорення, враховуючи, що початкова швидкість $V_{\text{поч.}} = \log_8 8$ (тобто, було – 8, стало – 8):

$$a_1 = \frac{V_{\text{кінц.1}} - V_{\text{поч.}}}{t} = \frac{\log_8 100 - \log_8 8}{2}$$

$$a_2 = \frac{V_{\text{кінц.2}} - V_{\text{поч.}}}{t_1} = \frac{\log_8 500 - \log_8 8}{t_1}$$

Так як прискорення постійне $a_1 = a_2 \Rightarrow$

$$\frac{\log_8 100 - \log_8 8}{2} = \frac{\log_8 500 - \log_8 8}{t_1}$$

Перейдемо до натуральної основи логарифма для того. Щоб можна було користуватись табличними значеннями:

$$\frac{\ln 100 - \ln 8}{2 \cdot \ln 8} = \frac{\ln 500 - \ln 8}{t_1 \cdot \ln 8}$$

$$t_1 = \frac{2 \cdot (\ln 500 - \ln 8)}{\ln\left(\frac{100}{8}\right)}$$

Відповідь: приблизно 3 години 20 хвилин.

Навіть будова тіла деяких живих істот пов'язана з логарифмами. Наприклад, раковини багатьох молюсків, равликів закручені по логарифмічній спіралі. І не тільки равковини. Павук епейра, коли плете павутину, закручує нитки навколо центру по логарифмічним спіралям.

Логарифми в музиці.

Музиканти зазвичай не дуже цікавляться математикою. І навіть не уявляються собі, що досить тісно з нею зв'язані. В акустиці ми досить часто застосовуємо таку величину, як децибел. Виявляється, що і тут не обійшлося без логарифмів. Людське вухо дуже чутливе як до дуже тихих звуків, так і до дуже гучних. Тому подвоєння децибел зручніше буде записати як логарифм відношення поточної та одиничної звукової потужності:

$$D_p = 10 \lg \frac{P_2}{P_1}$$

Виходить, якщо звукова потужність збільшується в 100 разів, то децибели збільшуються лише на 20 одиниць.

Логарифми в медицині.

В медицині логарифми застосовуються для визначення кислотності шлункового соку або крові. Також застосовуються для обрахунків потужності лікарських препаратів та дозування для пацієнтів. Також використовуються для аналізу показників здоров'я, таких як ритм серця, тиск і температура тіла.

Логарифми в економіці та банківській справі.

Задача:

Ви поклали в банк a гривень. Молодіжний вклад дає 11% річних. Через скільки років вклад вдвічі збільшиться?

Розв'язання:

За формулою складних відсотків вклад начисляється наступним чином:

$$S = A \left(1 + \frac{P}{100} \right)^n$$

S – накопичувальна сума

A – початкова сума вкладу

P – відсоткова річна ставка

n – термін зберігання вкладу

$$2a = a(1,11)^n, (1,11)^n = 2$$

$$n = \log_{1,1} 2 \approx 6,6 \text{ років.}$$

В побуті, наприклад, логарифми застосовуються для роботи з вагами або термометром. Ми використовуємо логарифмічну шкалу, коли стаємо на ваги або виміряємо температуру, так як вона дозволяє краще сприймати значення та робити більш точні порівняння.

В сучасному світі неможливо уявити собі роботу без калькулятора. А більшість калькуляторів має функцію логарифма, яка дозволяє швидше і зручніше виконувати складні математичні операції.

Логарифмічна функція – обернена функція до показникової. Функція виду $y = \log_a x$, де a – число, x – невідома змінна. ($a > 0; a \neq 1$).

Тому розглянемо приклади використання також і показникової функції.

Показникова функція в науці.

У біології є закони, які можна описати за допомогою саме цієї функції.

Наприклад:

Закон органічного розмноження: за сприятливих умов (відсутності ворогів, великої кількості їжі) живі організми розмножувалися б за законом показникової функції.

Наприклад: одна кімнатна муха може за літо зробити $8 \cdot 10^{14}$ особин потомства. Їхня вага склала б кілька мільйонів тонн, вони б зайняли величезний простір, а якщо вибудувати їх у ланцюжок, то довжина була б більшою, ніж відстань від Землі до Сонця. Але оскільки крім мух існує

безліч інших тварин і рослин, багато з яких є природними ворогами мух, то їх кількість не досягає вищевказаних значень. За таким же принципом поширилися завезені в Австралію кролики, які стали екологічною катастрофою цього унікального регіону. Зростання різних видів мікроорганізмів та бактерій, дріжджів, ферментів, кількості клітин гемоглобіну в організмі людини, яка втратила багато крові підпорядковуються одному закону: $N = N_0 * e^{k*t}$

Закон органічного згасання: подібний до розмноження, але відбувається у зворотний бік [3].

Закон вирівнювання також описується показниковою функцією і присутній при процесах: руйнування адреналіну в крові, зменшення кількості радіоактивних речовин, що виводяться нирками.

Вищенаведені закони доводять, що показова функція має велике практичне значення у біології, особливо у її розділах, як екологія і медицина.

У фізиці теж є величини та закони підпорядковані цій функції. Наприклад, процес зміни температури чайника при кипінні, процес вирівнювання, який можна спостерігати при включенні та вимкненні електричних ланцюгів, при падінні тіла з парашутом виражається формулою: $T = T_0 + (100 - T_0) * e^{-k*t}$

Також показникова функція застосовується при описі процесів ядерної фізики. Коли радіоактивна речовина розпадається, його кількість зменшується, через деякий час залишається половина первинної речовини. Цей проміжок часу t_0 називається періодом напіврозпаду. Загальна формула для цього процесу: $m = m_0 * \left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{t}{t_0}}$, де m_0 - початкова маса речовини. Чим більший період напіврозпаду, тим повільніше розпадається речовина. Це використовують для визначення віку археологічних знахідок.

В ядерних реакціях: швидкість розгалужено-ланцюгового процесу в газовій фазі у початкових стадіях (аж до вигорання 30-40% газу) виражається формулою: $W = k|A| * \frac{w_0}{f-g} * e^{(f-g)t}$, де k - константа швидкості реакції активного центра з вихідною речовиною, $|A|$ - концентрація вихідної речовини, w_0 - швидкість зародження ланцюгів, f і g - відповідно ефективні константи швидкості розгалуження та обрив, t – час [3].

А при проходженні світла через каламутне середовище кожен шар цього середовища поглинає строго певну частину світла, що падає на нього. Сила світла I визначається за формулою: $I = I_0 * e^{-k*s}$, де s – товщина шару, k – коефіцієнт, що характеризує каламутне середовище.

Висновки та перспективи подальших пошуків у напрямі дослідження. На мою думку, тема «Логарифмічні рівняння та нерівності» є доступною та цікавою для вивчення учнями старших класів.

Подальші пошуки у напрямі дослідження цієї проблеми можуть бути пов'язані зі складанням та розв'язуванням математичних, фізичних, економічних задач прикладного характеру, котрі стосуються різноманітних сфер життя, що в свою чергу матиме позитивний вплив на теоретичні та практичні знання, уміння та навички учнів старшої школи.

Список літератури:

1. Ю.Ару, К.Кор'юс, Е.Саар Вечірній підручник із математики (видання п'яте, виправлене), 2014. – 291 с.
2. Логарифм та його застосування. URL: [<https://buki.com.ua/blogs/logarifm-ta-iogo-zastosuvannya/>]
3. О.Істер Математика (алгебра та початки аналізу та геометрія), рівень стандарту, 2019. – 36 с.
4. Практичне застосування логарифма. URL: [<https://www.slideshare.net/zdwango/ss-57281387>]
5. Я. І. Перельман Захоплююча алгебра: 1933. – 215 с.