УДК 377.5.315

ПРИКЛАДНІ ЗАДАЧІ СТЕРЕОМЕТРІЇ

Шевченко Олена, Ключник Інна

Науковий керівник : кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри математики та цифрових технологій Ключник І. Г.

Центральноукраїнський державний університет імені Володимира Винниченка, м. Кропивницький, Україна

У даній публікації досліджується практичне використання стереометрії - галузі геометрії, що досліджує фігури та їх взаємне розташування в тривимірному просторі. Ця тема має значення в різних практичних галузях, таких як архітектура, медицина, інженерія, програмування і багато інших. У статті наводяться конкретні приклади завдань із різних галузей, таких як обчислення об'ємів об'єктів, визначення відстаней і кутів, побудова проекцій тощо. Для розв'язання цих завдань використовуються різні методи і підходи, включаючи тригонометрію, методи вимірювання та геометричні перетворення. Ця стаття підкреслює важливість цієї теми і заохочує до подальших досліджень та відкриттів в цій області.

Ключові слова: *стереометрія, прикладні задачі, методи розв'язку, фігури у просторі*

APPLIED PROBLEMS OF STEREOMETRY

Olena Shevchenko, Inna Kliuchnyk

Academic supervisor: candidate of physical and mathematical sciences, associate professor of the department of mathematics and digital technologies Kliuchnyk I. G.

This publication explores the practical use of stereometry, the branch of geometry that studies shapes and their relative location in three-dimensional space. This topic is important in various practical fields such as architecture, medicine, engineering, programming and many others. The article provides specific examples of tasks from various fields, such as calculating the volumes of objects, determining distances and angles, constructing projections, etc. Various methods and approaches are used to solve these problems, including trigonometry, measurement methods, and geometric transformations. This article highlights the importance of this topic and encourages further research and discovery in this area.

Keywords: *stereometry, applied problems, solution methods, figures in space.*

Постановка проблеми: Стереометрія, як галузь науки, має різноманітні застосування в житті та в різних галузях, включаючи науку, промисловість та повсякденні ситуації.

У наукових дослідженнях стереометрія допомагає аналізувати просторові дані, вивчати деформації, створювати 3D-моделі об'єктів та досліджувати різні аспекти просторової геометрії.

Стереометрія допомагає розробляти методи точного вимірювання розмірів об'єктів і поверхонь, що важливо у промисловості, металургії, будівництві та інших галузях. Наприклад, при проектуванні будівель існують програми стереометрії, які дозволяють архітекторам створювати віртуальні 3D-моделі будівель та оцінювати їх вигляд та функціональність до будівництва.

Крім того, стереометрія знайшла широке застосування у галузі віртуальної та доповненої реальності. У цьому контексті розробляються програмні рішення для створення та використання тривимірних моделей у віртуальних середовищах. Це стосується таких галузей, як дизайн, архітектура, реклама та багато інших. Також ця наука використовується для створення інтерактивних тривимірних моделей для навчання, моделювання та інших цілей.

Стереометрія має важливе застосування в обробці та аналізі зображень. Вона є важливою частиною комп'ютерного зору, де алгоритми використовуються для аналізу та інтерпретації зображень. Це має велике значення у робототехніці, автономних автомобілях та інших автоматизованих системах. З використанням стереометрії можна розробляти системи розпізнавання об'єктів на зображеннях. Наприклад, системи відеоспостереження можуть використовувати стереометрію для виявлення та відстеження рухливих об'єктів. Також, алгоритми стереометрії використовуються для автоматичного розпізнавання облич в системах безпеки та відеоспостереженні, що підвищує рівень безпеки.

Одним із напрямків використання стереометрії є медицина. Наприклад, для створення тривимірних моделей органів та тканин людського тіла. Це допомагає медичним працівникам проводити віртуальні операції та тренуватися перед хірургічними втручаннями.

В сільському господарстві стереометрія використовується для планування та виконання сільськогосподарських робіт, оптимізації господарських процесів і контролю над врожаєм.

Прикладом успішного використання стереометрії також є в освіті. У навчанні може використовуватися для створення інтерактивних навчальних програм та віртуальних лабораторій для кращого зрозуміння математики та геометрії.

Застосування стереометрії дуже різноманітні і розширюються з розвитком нових технологій та програмних рішень. Ця галузь науки грає важливу роль та стає невід'ємною частиною у різних сферах нашого життя, допомагаючи покращувати ефективність, точність і безпеку багатьох процесів та досліджень, а також допомагає заощадити час та кошти. Тому дослідження та розвиток стереометрії є важливим завданням для науки та технологій у майбутньому.

Аналіз досліджень і публікацій: У багатьох країнах світу ведуться дослідження у галузі прикладних математичних задач, оскільки це є важливою і перспективною галуззю науки та технологій. Роботи таких вчених, як В.В. Фірсов, Ю.М. Колягін, А.М. Колмогоров, Г.Д. Глейзер, Г.П. Бевз, І.О. Лурьє, А.Д. Мишкіс, І.В. Бекбоєв, А.С. Адигозалов та інші, присвячені різним аспектам прикладних математичних завдань. Зазвичай це стосується завдань, які входять у шкільний курс алгебри та планіметрії [1-3]. Проблема навчання вирішення прикладних завдань у стереометрії залишається дуже актуальною і важливою для наукового співтовариства.

Мета статті: Полягає в розкритті можливості використання стереометрії у різноманітних наукових і технічних завданнях. Продемонструвати, що саме стереометрія є важливою областю для багатьох напрямків сучасного світу. У статті також приведені приклади життєвих ситуацій з різних галузей, де можна успішно використовувати стереометрію для вирішення конкретних завдань.

Виклад основного матеріалу (результатів) дослідження:

Задача 1:

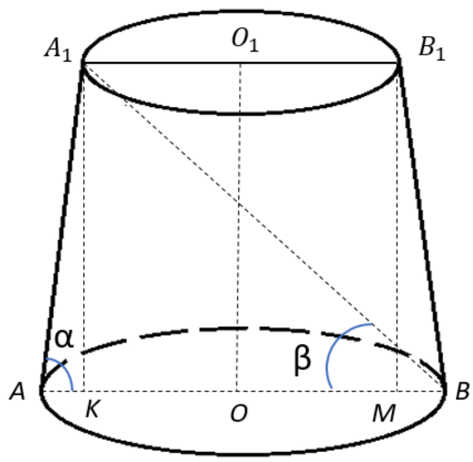
Уявіть, що ви займаєтесь дизайном капелюхів та створюєте макет конусоподібного капелюха зі зрізом на вершині. Кут між твірною зрізаного конуса та площиною більшої основи дорівнює α, а кут між діагоналлю осьового перерізу та цією площиною дорівнює β. Вам потрібно знайти радіус основи зрізаного конуса, якщо висота капелюха дорівнює h.

Розв'язок:

$A_1K = B_1M = h$ – висота зрізаного конуса;

$AA_1 = BB_1$ – твірна зрізаного конуса;

$\angle A_1AO = \angle B_1BO = \alpha$ – кут між твірною та більшою основою зрізаного конуса;



A_1ABB_1 – осьовий переріз зрізаного конуса;

$\angle A_1BA = \beta$ – кут між діагоналлю осьового перерізу та більшою основою зрізаного конуса;

r – радіус більшої основи зрізаного конуса;

r_1 – радіус меншої основи зрізаного конуса;

1) Зі трикутника AA_1K ($\angle A_1KA = 90°$) : за означенням тангенса гострого кута прямокутного трикутника :

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{A_1K}{AK} = \frac{h}{AK} \rightarrow AK = \frac{h}{\mathrm{tg}\alpha}$$

2) Зі трикутника A_1KB ($\angle A_1KB = 90°$) : за означенням тангенса гострого кута прямокутного трикутника :

$$\mathrm{tg}\beta = \frac{A_1K}{KB} = \frac{h}{KB} \rightarrow KB = \frac{h}{\mathrm{tg}\beta}$$

3) Знайдемо радіус більшої основи зрізаного конуса:

$$r = \frac{AK + KB}{2} = \frac{\frac{h}{\mathrm{tg}\alpha} + \frac{h}{\mathrm{tg}\beta}}{2} = \frac{h \times \mathrm{tg}\alpha + h \times \mathrm{tg}\beta}{\mathrm{tg}\alpha \times \mathrm{tg}\beta \times 2} = \frac{h \times (\mathrm{tg}\alpha + \mathrm{tg}\beta)}{\mathrm{tg}\alpha \times \mathrm{tg}\beta \times 2}$$

$$= \frac{h \times (\mathrm{tg}\alpha + \mathrm{tg}\beta)}{2}$$

4) Знайдемо радіус меншої основи зрізаного конуса:

A_1B_1=KB-AK

$$r_1 = \frac{A_1B_1}{2} = \frac{KB - AK}{2} = \frac{\frac{h}{tg\alpha} - \frac{h}{tg\beta}}{2} = \frac{h \times tg\alpha - h \times tg\beta}{tg\alpha \times tg\beta \times 2} = \frac{h \times (tg\alpha - tg\beta)}{tg\alpha \times tg\beta \times 2}$$
$$= \frac{h \times (tg\alpha - tg\beta)}{2}$$

Відповідь: $r = \frac{h\times(tg\alpha+tg\beta)}{2}$

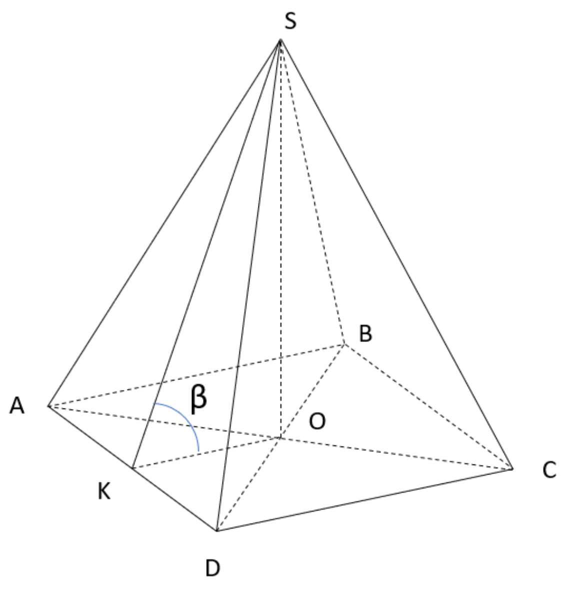
$r_1 = \frac{h\times(tg\alpha-tg\beta)}{2}$

Задача 2:

Уявіть, що ви створюєте 3D-модель будівлі, яка має форму правильної чотирикутної піраміди зі стороною основи a. Бічна грань піраміди нахилена до площини основи під заданим кутом. Для створення моделі вам необхідно знайти апофему піраміди, щоб правильно визначити розміри та пропорції будівлі.

Розв'язок:

За умовою ми маємо правильну чотирикутнику піраміду SABCD, тобто в основі буде лежати правильний чотирикутник (квадрат) ABCD зі стороною a (AB=BC=CD=AD=a), а бічні грані нахилені до площини основи під кутом β.



SO – висота піраміди (точка O центр основи піраміди).

Проведемо з точки O до сторони AD пряму, яка перетне AD в точці K (K ∊ AD, OK⊥ AD, SO⊥KO).

SK-похила.

За теоремою про три перпендикуляри маємо, що SK⊥AD.

SK – апофема піраміди (висота бічної грані), звідси $\angle SKO = \beta$ Так як в основі правильної піраміди лежить квадрат, тоді за його властивістю маємо, що

$KO||AD$ і $KO== \frac{AD}{2}= \frac{a}{2}$.

Δ SOK – прямокутний трикутник, тобто $\angle SOK=90°$ За означенням косинуса гострого кута прямокутного трикутника, можемо знайти SK – апофема правильної чотирикутної піраміди:

$$\cos\angle SKO = \frac{KO}{SK} \longrightarrow SK = \frac{KO}{\cos\angle SKO} = \frac{a}{2\cos\beta}$$

Відповідь: $\frac{a}{2\cos\beta}$.

Задача 3:

Уявіть собі, що ви працюєте архітектором, і вашим завданням є розрахувати об'єм піраміди, яка має форму правильного трикутника на основі. Ви вирішили взяти на себе це завдання і розпочали розрахунки. Під час розрахунків ви зрозуміли, що одна з бічних граней перпендикулярна до площини основи, а дві інші утворюють із площиною основи кут 45°. Задача полягає в тому, щоб визначити об'єм цієї піраміди.

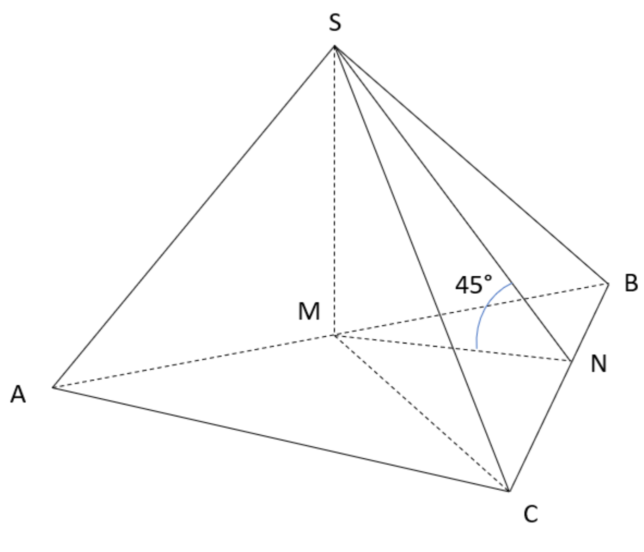
Розв’язок:

$V = \frac{1}{3}S_O \times h$ - формула для знаходження об’єму піраміди.

Δ ABC – правильний трикутник, який є основою піраміди, зі стороною a=2.

h= SM – висота піраміди.

$$S_O = S_{ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{2^2\sqrt{3}}{4} = \frac{4\sqrt{3}}{4} = \sqrt{3}$$



За умовою задачі ASB ⊥ ABC, отже, маємо, що SM є висотою ΔASB.

Також, маємо: CM⊥AB і MN⊥CB.

Так як за умовою задачі ΔABC є рівностороннім, то за однієї із властивостей MC є медіана цього трикутника, тому маємо, що $S_{CMB} = \frac{S_{ABC}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Із ΔCMB: MN– висота, довжину якої можемо знайти з формули площі Δ CMB.

$S_{CMB} = \frac{1}{2} \times BC \times MN = \frac{1}{2} \times 2 \times MN = MN = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

З’єднаємо точки S та M. Так як MN⊥BC, тому за теоремою про три перпендикуляри маємо, що SN⊥BC, звідси отримуємо, що ∠SNM=45° – апофема даної піраміди.

Із трикутника SNM (∠SMN=90), у якого $MN = \frac{\sqrt{3}}{2}$, ∠SNM=45°, тому за означенням тангенса гострого кута прямокутного трикутника можемо знайти SM, який є висотою піраміди:

$$\mathrm{tg}\angle SNM = \frac{SM}{NM} \to$$

$$h = SM = NM \times \mathrm{tg}\angle SNM = \frac{\sqrt{3}}{2} \times \mathrm{tg}45^0 = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 1 = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Отже, тепер ми можемо знайти об'єм піраміди:

$$V = \frac{1}{3} S_O \times h = \frac{1}{3} \times \sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{3} \times 3 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Відповідь: $\frac{1}{2}$.

Висновки та перспективи подальших пошуків у напрямі дослідження :

Вивчення стереометрії є важливим напрямком і має великий потенціал для подальшого розвитку. Вона відкриває багато можливостей для різних галузей. А перед викладачем постає важливе завдання - навчити майбутніх фахівців застосовувати свої математичні знання в реальних ситуаціях.

Список використаної літератури

1.Мерзляк, А. Г., Номіровський Д. А., Полонський В. Б., Якір М. С. Геометрія: підручник для 11-го класу (профільний рівень)/ А. Г. Мерзляк, Д. А. Номіровський, В. Б. Полонський, М. С. Якір –Х. : Гімназія, 2019. - 207 с.

2.Істер О.С., Єргіна О.В. Геометрія: підручник для 11-го класу (профільний рівень)/ О.С. Істер, О.В. Єргіна - Київ: Генеза, 2019.- 288 с.

3.Дубинчук О.С., Слєпкань З.І., Філіпова С.М. Методичні особливості навчання геометрії в середньому ПТУ: Посібник. – К.: Вища шк., 1992. – 271 с