УДК 519.85

РЕАЛІЗАЦІЯ МЕТОДУ РОЗВ'ЯЗАННЯ НЕСТАЦІОНАРНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ В ЧАСТИННИХ ПОХІДНИХ З ВИКОРИСТАННЯМ РЯДІВ ТЕЙЛОРА ЗА ЧАСОМ ДЛЯ ОДНІЄЇ З ЗАДАЧ МЕХАНІКИ

Нога Антон

Науковий керівник: кандидат фіз.-мат. наук, доцент Халецька З. П.

Центральноукраїнський державний університет імені Володимира Винниченка,

м. Кропивницький, Україна

Робота присвячена використанню методу розв'язання нестаціонарних диференціальних рівнянь в частинних похідних з використанням рядів Тейлора за часом, який дозволяє вирішити деякі задачі механіки. Особливістю представленого аналізу є реалізація алгоритму, як можливість використання та виконання для задачі обтікання частинки в рідині з нагріванням або охолодженням частинки.

Ключові слова: алгоритм, задача механіки рідини, диференціальні рівняння.

Implementation of the method of solving non-stationary of differential equations in partial derivatives using Taylor rows for time for mechanical problems

Anton Noha

Scientific supervisor: Associate Professor Khaletska Z.P.

Volodymyr Vynnychenko Central Ukrainian State University,

Kropyvnytskyi, Ukraine

The work is devoted to the use of the method of solving non-stationary differential equations in partial derivatives using Taylor series over time, which allows to solve some problems of mechanics. A feature of the presented analysis is the implementation of the algorithm, as an opportunity to use and perform for the task of flowing the particle in the liquid with heating or cooling of the particle.

Keywords: algorithm, problems of fluid mechanics, differential equations.

Постановка проблеми. Все більше дослідників та інженерів в даний час використовують складні математичні моделі для розв'язання практичних задач аналізу процесів, які відбуваються в об'єктах дослідження, оцінювання його характеристик, проектування.

Для цього застосовуються різноманітні аналітичні методи, коли результат отримується шляхом перетворень моделі на основні правил і законів відповідного розділу математики, або цифрові методи, коли результат отримується шляхом обчислень за допомогою певних комп'ютерних алгоритмів. В останні десятиліття створено значну кількість пакетів прикладних програм для розв'язання складних систем рівнянь в частинних похідних для моделювання різноманітних процесів,

Актуальність обраної теми обумовлена в основному швидкістю досліджень в галузях механіки і фізики, що викликає збільшення складності завдань та рівнянь, що виникають у процесі розв'язання задач аналізу різних процесів. зокрема, з механіки рідини, як для вузькоспеціального, так і широкого застосування.

Метою дослідження є реалізація алгоритму методу розв'язання нестаціонарних диференціальних рівнянь в частинних похідних з використанням рядів Тейлора за часом для однієї з задач механіки**,** а саме задачі обтікання частинки в рідині з нагріванням або охолодженням частинки.

Аналіз досліджень і публікацій. Методи, які використовують розвинення функції в ряд Тейлора займають чільне місце серед методів наближеного інтегрування диференціальних рівнянь. Вперше такий підхід запропонував Леонард Ейлер (1707-1783). У сучасній математиці такі підходи використовували Адамс Е., Ейгенрам П., Лохнер Р., Мур Р., Ралл Л., і багато інших**.**

Дослідженню шляхів використання рядів Тейлора за часом для розв'язування нестаціонарних рівнянь в Україні займається Казачков І.В. При аналізі нашої теми дослідження слід звернути увагу на його роботу [1], де розглянуто комбінований дискретний алгоритм з використанням рядів Тейлора. Комбінований дискретно-просторовий алгоритм з використанням розкладів Тейлора за часом був розроблений і апробований на декількох задачах. Крайові задачі для рівнянь математичної фізики другого порядку за простором і першого порядку за часом описують багато різних фізичних процесів з механіки рідини, тепло- і масопереносу і т.п. Зведенням розв'язку нестаціонарних крайових задач до стаціонарних із застосуванням послідовного диференціювання рівнянь за часом та використанням розкладів в ряди Тейлора за часом в задачах механіки рідини присвячено роботи [2-3].

Виклад основного матеріалу.

Одним із сучасних наукових методів дослідження явищ та процесів є математичне моделювання, яке в багатьох випадках дозволяє замінити реальний процес і дає можливість отримувати як якісну так і кількісну картину процесу.

Оскільки точні розв'язки таких моделей можна знайти в дуже окремих випадках, то необхідно використовувати наближені методи. Більшість об'єктів дослідження є нестаціонарними та працюють в динамічних режимах, тобто вони змінюються у часі під впливом внутрішніх і зовнішніх чинників. Як моделі динаміки таких об'єктів використовуються диференціальні рівняння.

В таких рівняннях міститься частинні похідні і шукана величина залежить від декількох змінних. Для розв'язання великого спектру саме таких задач використовують чисельні методи.

Чисельні методи розв'язання нестаціонарних рівнянь математичної фізики інтенсивно розвиваються внаслідок великих потреб практики та зростання можливостей комп'ютерних наук. Вчені та інженери постають перед необхідністю розробки нових методів, оскільки відомі чисельні методи та підходи в ряді випадків не можуть задовольнити значно посилених та постійно змінюваних потреб практики. Багато уваги приділяється створенню програмних платформ, зручних для користувачів, які не мають практичного досвіду програмування або мають його на порівняно невисокому рівні.

Одним із чисельних методів для розв'язання задач такого типу є «метод розв'язання нестаціонарних диференціальних рівнянь в частинних похідних з використанням рядів Тейлора за часом».

Опишемо процес застосування даного методу для однієї з задач механіки, а саме задачі обтікання частинки в рідині з нагріванням або охолодженням частинки.

Досліджуваний алгоритм реалізує чисельне вирішення наступного крайового завдання для двовимірного нестаціонарного рівняння у частинних похідних, яке описує процес теплопередачі для частинки в потоці.

Частинку в потоці рідини задаємо за допомогою полярної системи координат ρ, θ, де ρ і θ відповідно координати радіуса і кута, $\rho = 0$ -центр рухомої частинки, $\rho = 1$ її поверхня, τ -час:

$$\left\{\frac{\partial}{\partial \rho} - \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} - \left[\frac{2}{\rho} - \frac{Pe}{2}\cos\theta\left(1 - \frac{3}{2\rho} + \frac{1}{2\rho^3}\right)\right]\frac{\partial}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} - \left[\frac{ctg\,\theta}{\rho^2} + \frac{Pe}{2}\frac{\sin\theta}{\rho}\left(1 - \frac{3}{4\rho} + \frac{1}{4\rho^3}\right)\right]\frac{\partial}{\partial \theta}\right\}T = 0$$

де

$\rho = \frac{r}{R}, \quad \tau = \frac{at}{R^2} \quad Pe = \frac{2UR}{a}$ – безрозмірна координата, час, число Пекле, відповідно, T - температура, R - радіус частинки, U-швидкість потоку, a - коефіцієнт теплопровідності в потоці рідини.

Область обтікання частинки рідиною визначається граничними і початковими умовами:

$$1 < \rho < \infty, \qquad 0 \le \theta \le \pi, \qquad 0 < \tau < \infty$$

$$T|_{\rho=1} = T_s(\theta, \tau), \quad T|_{\rho=\infty} = 0, \qquad T|_{\tau=0} = 0$$

Алгоритм

Для ефективного та більш зручного використання даного алгоритму розділимо його на етапи. Побудуємо UML діаграму (рис. 1) для наочності та більш детально розглянемо її елементи.

Почнемо з необхідності побудови кінцево-різницевої сітки в області течії, включаючи сферичну частинку в потоці за наступними формулами:

$\rho_i = (i - 1/2)\Delta\rho$, i=1, 2, …, M, $\Delta\rho = \rho_{max}/(M - 1/2)$

$\theta_j = j\Delta\theta$, j=0,1,…,N-1, $\Delta\theta = 2\pi/N$

$\tau_n = n\Delta\tau$, n=0,1,2,…

$\mathrm{H} = \max\{\Delta r, \Delta\theta\}$

Тут кроки по простору і часу вибираються з міркувань точності розрахунку і оптимального інтервалу за часом, необхідного для процесу, що розглядається.

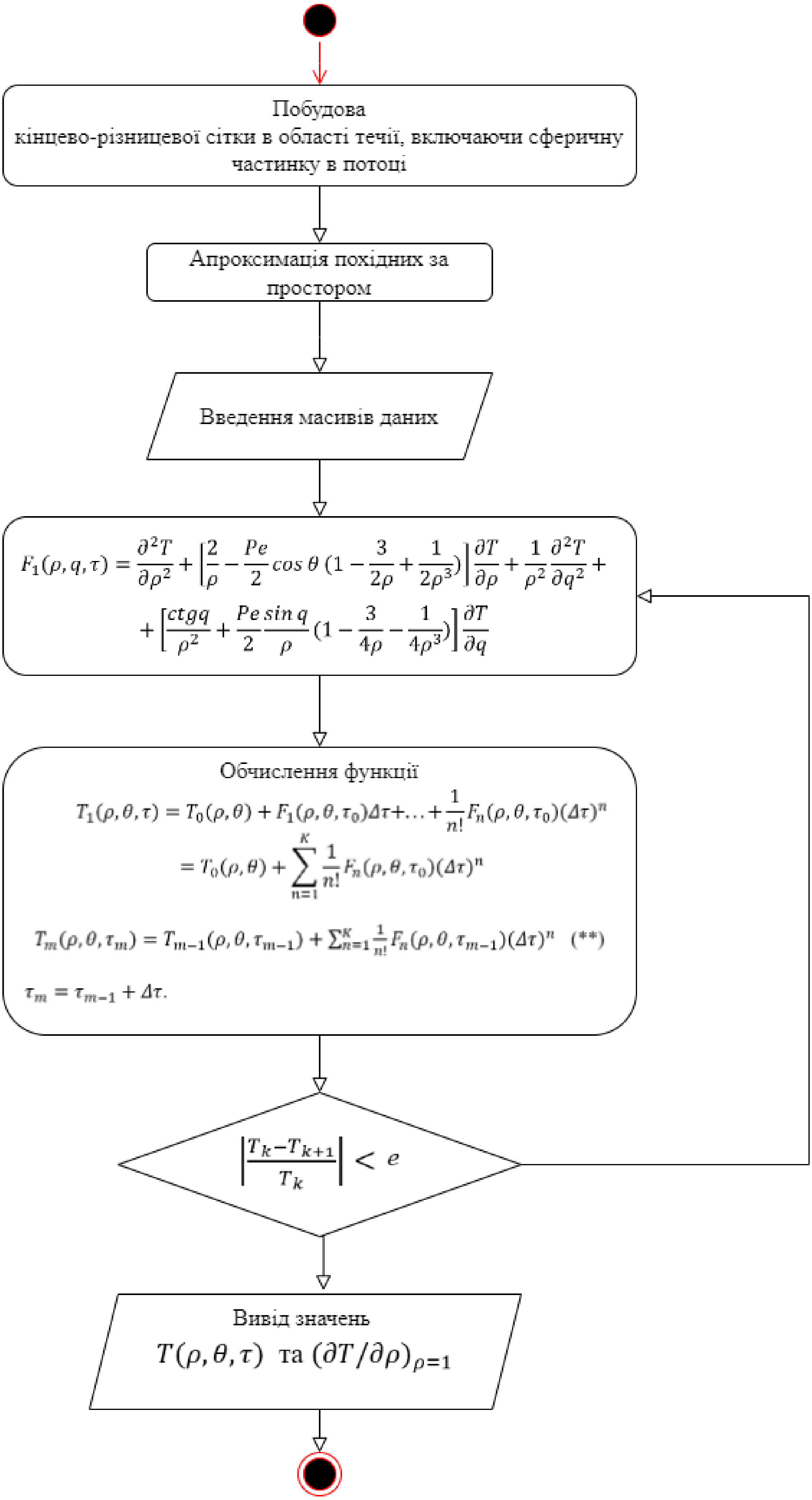

Рис. 1. Схема алгоритму розв'язання нестаціонарних диференціальних рівнянь в частинних похідних з використанням рядів Тейлора за часом

Далі апроксимуюємо похідні за простором за формулами:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{f_n^{i+1,j} - f_n^{i-1,j}}{2\Delta x}, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{f_n^{i+1,j} - 2f_n^{i,j} + f_n^{i-1,j}}{(\Delta x)^2}.$$

На межі області так:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{f_n^{3,j} - 2f_n^{2,j} + f_n^{1,j}}{2\Delta x}.$$

Індекс n вказує на належність величин відповідного тимчасового шару.

У ці формули підставити, відповідно, T замість f і замість x по черзі одну і другу змінні ρ, θ.

Наступний етап - це введення заданих масивів даних:

$T_0(\rho,\theta), T_s(\theta,\tau), F_1(\rho,\theta,\tau), F_2(\rho,\theta,\tau), \dots$ - до заданого числа К.

Далі: $T(\rho,\theta,\tau), DT(\rho,\theta,\tau), \dots, DKT(\rho,\theta,\tau)$

Далі нам потрібно обчислити функції:

$$F_1(\rho,q,\tau) = \frac{\partial^2 T}{\partial \rho^2} + \left[\frac{2}{\rho} - \frac{Pe}{2} cos\,\theta\,(1 - \frac{3}{2\rho} + \frac{1}{2\rho^3})\right]\frac{\partial T}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 T}{\partial q^2} +$$
$$+ \left[\frac{ctgq}{\rho^2} + \frac{Pe}{2}\frac{sin\,q}{\rho}(1 - \frac{3}{4\rho} - \frac{1}{4\rho^3})\right]\frac{\partial T}{\partial q}$$

$F_2(\rho,q,\tau) = F_1(F_1)$ поставимо у вираз для F_1 (вище) замість Т функцію F_1 і так далі: у наступне $F_3(\rho,q,\tau) = F_1(F_2)$отримане $F_2(\rho,q,\tau) = F_1(F_1)$.

Потім обраховуємо за рекурентною формулою (**) і виводимо значення $T(\rho,\theta,\tau)$ та $(\partial T/\partial \rho)_{\rho=1}$ із заданим кроком за часом (по τ):

$$T_1(\rho,\theta,\tau) = T_0(\rho,\theta) + F_1(\rho,\theta,\tau_0)\Delta\tau + \dots + \frac{1}{n!}F_n(\rho,\theta,\tau_0)(\Delta\tau)^n$$
$$= T_0(\rho,\theta) + \sum_{n=1}^{K}\frac{1}{n!}F_n(\rho,\theta,\tau_0)(\Delta\tau)^n$$

$$T_m(\rho,\theta,\tau_m) = T_{m-1}(\rho,\theta,\tau_{m-1}) + \sum_{n=1}^{K}\frac{1}{n!}F_n(\rho,\theta,\tau_{m-1})(\Delta\tau)^n \quad (**)$$

$$\tau_m = \tau_{m-1} + \Delta\tau.$$

Розрахунок попередніх формул ведемо для кожного моменту часу таким чином, щоб зіставлення обчислень на двох послідовних сітках за часом з кроками $\Delta\tau_m$ (k) та $\Delta\tau_m/2$ (k+1) відрізнялося не більше ніж на задану величину похибки:

$\left|\frac{T_k - T_{k+1}}{T_k}\right| < e$, де e – задана точність.

В результаті виводимо значення $T(\rho, \theta, \tau)$ та $(\partial T/\partial\rho)_{\rho=1}$ із заданим кроком за часом (по τ).

За необхідності можемо провести розрахунки за рівнянням (**) до першого, другого, третього і наступних наближень (щоб мати дані для порівняння: з точністю до $\Delta\tau$– перший порядок точності, до $(\Delta\tau)^2$ – другий, $(\Delta\tau)^3$ – третій і так далі).

Попередній аналіз і тестування показали високу ефективність запропонованого алгоритму розв'язку нестаціонарних диференціальних рівнянь в частинних похідних і його легку реалізацію на комп'ютері. Аналогічне розповсюдження алгоритму можливе і на інші подібні системи рівнянь математичної фізики. Питання стійкості методу і деякі особливості, потребують подальшого більш детального вивчення.

Враховуючи, що була розглянута лише одна з задач механіки, можна зробити висновок , що застосування даного методу можливе і для інших здач механіки , що потребує розробки узагальненого алгоритму.

Список літератури

1. Kazachkov I.V. A combined space discrete algorithm with a Taylor series by time for CFD// WSEAS Transactions on fluid mechanics.- Issue 1, Volume 6, January 2011.- P. 51-69 ;
2. Kazachkov Ivan., Sergeichik Yevgen. Application of Combined Space Discrete Numerical Algorithm with a Taylor Series by Time for Simulation in Continua/ Proc. 4 IASME/WSEAS Int. Conf. on CONTINUUM MECHANICS (CM'09).- Cambridge, UK.- February 24-26, 2009.- p.120-125..
3. Казачков И.В., Казачкова Е.И. Метод численного решения нестационарных уравнений гидродинамики и теплообмена// Энергетика.- 2007.- № 2.- С. 65-71;