УДК 377.5.315

ПРИКЛАДНІ ЗАДАЧІ СТЕРЕОМЕТРІЇ

Шевченко Олена

Науковий керівник : кандидат фізико-математичних наук,

доцент Ключник І. Г.

Центральноукраїнський державний університет імені

Володимира Винниченка, м. Кропивницький, Україна

Стаття присвячена прикладним задачам стереометрії, яка є розділом геометрії і вивчає фігури у просторі і їх взаємне розташування. У статті розглядаються приклади задач з різних сфер(для розрахунку об'єму тіл, визначення відстаней та кутів, побудови проекцій та інше), для розв'язку яких використовуються різні методи та підходи, наприклад, застосування тригонометрії, метод вимірювання, геометричні перетворення, метод побудови та інше. Ця тема є актуальною в практичних застосуваннях для багатьох галузей (Наприклад: архітектура, медицина, інженерія, програмування та багато інших). Стаття розкриває важливість розглянутої теми та заохочує до нових досліджень та відкриттів.

Ключові слова: *стереометрія, прикладні задачі, фігури у просторі.*

APPLIED PROBLEMS OF STEREOMETRY

O. Shevchenko

Scientific supervisor: candidate of physical and mathematical sciences,

associate professor Klyuchnyk I. G.

The Volodymyr Vynnychenko Central Ukrainian State Pedagogical University,

Kropyvnytsky, Ukraine

The article is devoted to the applied problems of stereometry, which is a branch of geometry and studies figures in space and their mutual location. The article considers examples of problems from various fields (for calculating the volume of bodies, determining distances and angles, constructing projections, etc.), for the solution of which various methods and approaches are used, for example, the use of trigonometry, the method of measurement, geometric transformations, the method buildings and others. This topic is relevant in practical applications for many fields (for example: architecture, medicine, engineering, programming and many others). The article reveals the importance of the discussed topic and encourages new research and discoveries.

Keywords: *stereometry, applied problems, figures in space.*

Постановка проблеми. Стереометрія використовуються для створення комп'ютерних програм для використання в різних галузях науки та виробництвах. Наприклад, програми для планування сільськогосподарських робіт, вивчення деформації будівель, медичних досліджень, створення 3D моделей, тощо . За останні роки досягнуто значного прогресу в розробці алгоритмів лазерної стереометрії та комп'ютерної обробки отриманих даних і програм автоматичного стереозору, які дозволяють комп’ютерам автоматично аналізувати трирівневі зображення та розпізнавати об’єкти в просторі. Наприклад, такі алгоритми використовуються в автоматичному розпізнаванні обличчя для систем безпеки та відеоспостереження.

Додатково, стереометрія також знайшла застосування в області віртуальної та доповненої реальності, де розробляються програмні рішення для відображення та використання 3D-моделей в цих середовищах. Приклади включають використання цих технологій у дизайні, архітектурі, рекламі та інших галузях. Дослідження в галузі стереометрії також знайшли застосування у створенні інтерактивних 3D-моделей для навчання, моделювання та інших цілей.

Прикладом успішного використання стереометрії є розробка 3D-моделей та віртуальних середовищ для навчання та підготовки медичних працівників. Ці середовища можуть точно відтворювати моделі органів та тканин людського тіла, що дозволяє студентам-медикам та фахівцям тренуватися для проведення хірургічних операцій та інших процедур.

Ще одним напрямком стереометрії є розробка методів для точного вимірювання розмірів об'єктів та поверхонь, що має важливе значення для різних галузей виробництва та науки, таких як металургія, машинобудування, археологія та інші.

В цілому, застосування стереометрії допомагає вирішувати багато реальних завдань у різних напрямках, забезпечуючи підвищення ефективності та точності виконання завдань, скорочення витрат часу та коштів, а також приносячи економічну вигоду. Тому дослідження та розвиток стереометрії є важливим завданням для науки та технологій у майбутньому.

Таким чином, дослідження і розробки в галузі стереометрії мають великий потенціал для вирішення практичних завдань і стимулювання розвитку в різних галузях науки і промисловості. А вміння учнів розв’язувати прикладні задачі стереометрії потребує особливих навичок, тривалої практики, а також здатності учня гнучко мислити.

Аналіз досліджень і публікацій. В багатьох країнах світу проводяться дослідження в області прикладних задач математики, адже це є актуальною та перспективною в галузі науки та технологій. В роботах В.В. Фірсова, Ю.М. Колягіна, А.М. Колмогорова, Г.Д. Глейзера, Г.П. Бевза, І.О. Лурьє, А.Д. Мишкіса, І.В. Бекбоєва, А.С. Адигозалова та ін. розглядалися різні питання прикладних задач математики. Здебільшого це прикладні задачі шкільного курсу алгебри та планіметрії [1-3]. Питання навчання розв’язування прикладних задач стереометрії залишається актуальним.

Мета статті: Полягає в поясненні застосування стереометрії в різних наукових і технічних задачах. У статті показано, які конкретні життєві ситуації з різних сфер, можна вирішити за допомогою стереометрії.

Виклад основного матеріалу (результатів) дослідження.

Задача 1:

Уявіть собі, що ви майстер з будівництва та вам потрібно побудувати піраміду для декорування фонтану. Основа піраміди - це прямокутник зі сторонами 4 см і 12 см. Для цієї піраміди площина двох бічних граней повинна бути перпендикулярна до площини основи. Також є ще одна грань, яка проходить через більшу сторону основи під кутом 45° до площини основи. Вам потрібно визначити, яка буде площа бічної поверхні цієї піраміди, щоб ви могли розрахувати кількість матеріалу, який вам знадобиться для будівництва.

Знайдіть:

1) висоту піраміди;

2) площу бічної поверхні піраміди.

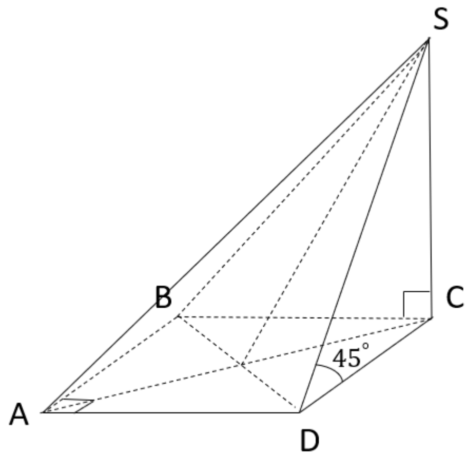
Розв’язок:

SABCD – піраміда. AB = CD = 4 см. BC = AD = 12см. SCD ⊥ ABCD, SBC ⊥ ABCD. $\angle SDC = 45°$.

h=?

$S_б$=?

1) Знайдемо висоту піраміди:



З трикутника SDC ($\angle SDC = 90°$) за означенням тангенса гострого кута прямокутного трикутника :

$\operatorname{tg} 45° = \frac{SD}{DC} = \frac{h}{DC} \rightarrow h = \operatorname{tg}45° \times CD = 1 \times 4 = 4$см.

2) Знайдемо бічну поверхню піраміди:

Для цього спочатку знайдемо площі ΔSBC, ΔSCD, ΔSAD, ΔSBA, за допомогою формули

$S = \frac{1}{2} \times a \times h$,

де a-довжина сторони трикутника;

h-довжина проведеної до сторони a висоти.

$S_{\Delta SBC} = \frac{1}{2} \times BC \times SC = \frac{1}{2} \times 12 \times 4 = 24$ см^2

$S_{\Delta SCD} = \frac{1}{2} \times CD \times SC = \frac{1}{2} \times 4 \times 4 = 8$ см^2

$S_{\Delta SAD} = \frac{1}{2} \times SD \times AD$

Із трикутника SCD знайдемо довжину сторони SD.

Так як, ΔSCD – прямокутний та CD=SC=4см., тоді SD=$4\sqrt{2}$ см.

$S_{\Delta SAD} = \frac{1}{2} \times 4\sqrt{2} \times 12 = 24\sqrt{2}$ см^2

$S_{\Delta SBA} = \frac{1}{2} \times SB \times AB$

Із трикутника SBC знайдемо довжину сторони SB. Так як, ΔSBC – прямокутний, скористаємося теоремою Піфагора: SB=$\sqrt{SC^2 + BC^2} = \sqrt{4^2 + 12^2} = \sqrt{16 + 144} = 4\sqrt{10}$ см.

$S_{\Delta SBA} = \frac{1}{2} \times 4\sqrt{10} \times 4 = 8\sqrt{10}$ см^2

Отже,

$S_б = S_{\Delta SBC} + S_{\Delta SCD} + S_{\Delta SAD} + S_{\Delta SBA}$

$S_{\Delta SBA} = 24 + 8 + 24\sqrt{2} + 8\sqrt{10} = 32 + 24\sqrt{2} + 8\sqrt{10} = 8(4 + 3\sqrt{2} + \sqrt{10})$ см^2

Відповідь: 1) h=4см.

2) $S_б = 8(4 + 3\sqrt{2} + \sqrt{10})$ см^2

Задача 2:

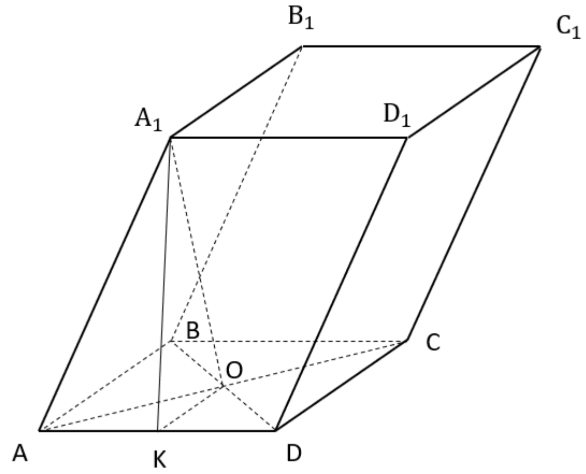
Уявіть, що ви збираєтеся зробити коробку з паперу в формі паралелепіпеда, в основі якого буде лежати квадрат. Одна з вершин верхньої сторони цієї коробки знаходиться на відстані b від нижньої сторони і рівновіддалена від усіх її вершин. Сторона основи має довжину а. Потрібно знайти повну поверхню цієї коробки.

Розв'язок:

Нехай $ABCDA_1B_1C_1D_1$ даний нам паралелепіпед . ABCD та $A_1B_1C_1D_1$ – основи паралелепіпеда. AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 – бокові ребра. ABCD – квадрат зі стороною а, О- центр квадрата, а вершина A_1 рівновіддалена від вершин A, B, C і D і знаходиться на відстані b від основи ABCD. Перпендикуляр, опущений з точки О на бік AB, проходить через її середину K. За теоремою про 3 перпендикуляра можна сказати, що $A_1K \perp AB$.

Повна поверхня паралелепіпеда знаходиться за такою формулою:

$S = S_б + 2 \times S_{осн}$



Так як в основі лежить квадрат зі стороною а, тоді площу основи шукаємо за формулою

$S_{осн} = a^2$

$Sб = 4 \times S_{AA_1BB_1}$

$KO = \frac{a}{2}$

Із трикутника A_1OK ($\angle A_1OK=90°$) знайдемо A_1K за теоремою Піфагора:

$A_1K=\sqrt{A_1O^2 - KO^2} = \sqrt{b^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{b^2 - \frac{a^2}{4}}$

Знайдемо площу сторони AA_1BB_1, яка є паралелограмом:

$$S_{AA_1BB_1} = AD \times A_1K = a \times \sqrt{b^2 - \frac{a^2}{4}} = a \times \sqrt{\frac{4b^2-a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{4b^2-a^2}}{2}$$

$$S_б = 4 \times \frac{a\sqrt{4b^2-a^2}}{2} = 2a\sqrt{4b^2 - a^2}$$

$$S = 2a\sqrt{4b^2 - a^2} \times 2a2 = 2a(a + \sqrt{4b^2 - a^2})$$

Відповідь: $S = 2a(a + \sqrt{4b^2 - a^2})$

Задача 3:

Уявіть, що ви займаєтеся створенням декоративної свічки з формою конуса. Вам потрібно розрізати конус на дві рівні частини по горизонтальній площині, щоб взяти з них матеріал для обшивки свічки. Вам відомі такі параметри конуса: його твірна - 13 см, висота - 12 см, пряма AB, яка паралельна основі, перетинає конус і віддалена від основи на 6 см і від висоти на 2 см. Знайдіть довжину відрізка цієї прямої, який лежить всередині конуса і який ви зможете використати для своєї декоративної свічки.

Розв'язок:

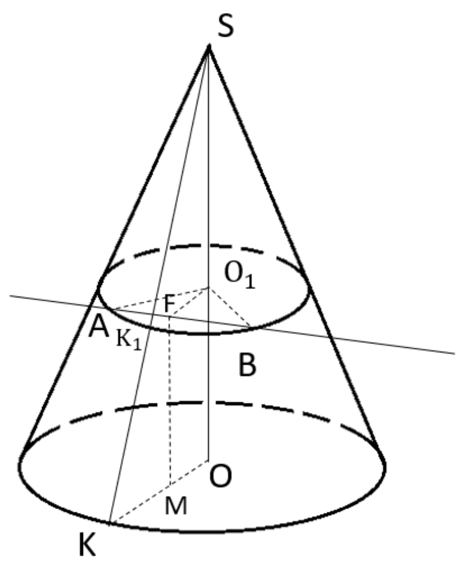
l = SK = 13см., h=SO=12см.

Пряма перетинає конус в точках A і B, тобто відрізок AB є шуканим.

Із трикутника SOK, який є прямокутним, знайдемо сторону за теоремою Піфагора:

KO=$\sqrt{SK^2 - SO^2} = \sqrt{13^2 - 12^2} = \sqrt{169 - 144} = \sqrt{25} = 5$см

$SO_1 = SO - O_1O = 12 - 6 = 6$ см.



За ознакою подібності трикутників $\Delta SO_1K_1 \sim \Delta SKO$, звідси $\frac{O_1K_1}{KO} = \frac{SO_1}{SO}$ отже ,

$O_1K_1 = \frac{KO \times SO_1}{SO} = \frac{5 \times 6}{12} = \frac{30}{12} = \frac{5}{2} = 2,5$ см.

$O_1K_1 = O_1A = O_1B$

З точки O_1 до прямої AB проведемо перпендикулярно пряму, яка буде перетинати AB в точці F.

Тоді O_1F=2 см. FM=O_1O=6см.

Із прямокутного трикутника AO_1F знайдемо AF за теоремою Піфагора:

AF= $\sqrt{O_1A^2 - O_1F^2} = \sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2 - 2^2} = \sqrt{\frac{25}{4} - 4} = \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2} = 1{,}5$см.

Отже, AB=2×1,5=3см.

Відповідь: 3 см.

Висновки та перспективи подальших пошуків у напрямі дослідження. Отже, дослідження в галузі стереометрії мають великі перспективи. А навчити майбутніх фахівців застосовувати знання математики в життєвих ситуаціях є особлива задача для вчителя.

Список літератури

1. Мерзляк, А. Г., Номіровський Д. А., Полонський В. Б., Якір М. С. Геометрія: підручник для 11-го класу (профільний рівень)/ А. Г. Мерзляк, Д. А. Номіровський, В. Б. Полонський, М. С. Якір –Х. : Гімназія, 2019. - 207 с.
2. Істер О.С., Єргіна О.В. Геометрія: підручник для 11-го класу (профільний рівень)/ О.С. Істер, О.В. Єргіна - Київ: Генеза, 2019.- 288 с.
3. Дубинчук О.С., Слєпкань З.І., Філіпова С.М. Методичні особливості навчання геометрії в середньому ПТУ: Посібник. – К.: Вища шк., 1992. – 271 с.