УДК 519.21

ПОГЛИБЛЕННЯ НЕРІВНОСТІ ЧЕРНОВА ДЛЯ ГЕОМЕТРИЧНОГО РОЗПОДІЛУ

Макарчук Олег, Джавадова Сабіна

Науковий керівник: канд.-ф.-м. наук, доцент Макарчук О.П.

Центральноукраїнський державний університет імені Володимира Винниченка, м. Кропивницький, Україна

Анотація. Робота присвячена проблемі знаходження покращених оцінок в нерівності Чернова для випадкової величини, що має геометричний розподіл. Акцент здійснюється на випадок коли випадкова величина набуває зчисленну множину значення причому експонента від неї є абсолютно інтегровною випадковою величиною. Встановлено зв'язок між нерівністю Чернова та класичною нерівністю Маркова-Чебишева. Побудований аналог нерівності Чернова в термінах функції розподілу відповідної випадкової величини, що має чистий за Лебегом тип розподілу.

Ключові слова: ймовірнісна нерівність, математичне сподівання, дисперсія розподілу, функція розподілу, щільність розподілу, нерівність Маркова, нерівність Чернова, ймовірнісний простір.

Deepening inequality Chernova for geometric distribution

O Makarchuk, S Javadova

Scientific supervisor: Candidate of Physics and Mathematics Science Makarchuk O.P.

Volodymyr Vynnychenko Ukrainian State University, Kropyvnystky, Ukraine

Annotation. The work is devoted to the problem of finding improved estimates in Chernov's inequality for a random variable with a geometric distribution. Emphasis is placed on the case when the random variable acquires a numerical set of values, and its exponent is an absolutely integrable random variable.

Key words: probability inequality, mathematical expectation, distribution variance, distribution function, distribution density, Markov's inequality, Chernov's inequality, probability space.

1. Постановка проблеми.

Класичною ймовірнісною нерівністю є нерівність Андрія Андрійовича Маркова для абсолютно інтегровних випадкових величин. Вище вказана нерівність має наступний вигляд:

$$P(|\xi| \geq \varepsilon) \leq \frac{M(|\xi|)}{\varepsilon}$$

при умові, що існує скінченне математичне сподівання випадкової величини $|\xi|$. Відповідна нерівність виконується для довільного $\varepsilon > 0$.

Відповідна нерівність має ряд поглиблень одне з яких і є предметом відповідної роботи. Мова піде про нерівність Чернова, яка має наступний вигляд:

$$P(|\xi| \geq \varepsilon) \leq \frac{M(e^{|\xi|})}{e^{\varepsilon}}$$

Для того, щоб відповідна нерівність мала силу необхідно, щоб існувало математичне сподівання $M(e^{|\xi|})$, ця умова більш сильна ніж просто умова абсолютної інтегровності.

Розглянемо функцію

$$f(\varepsilon) = \frac{e^{\varepsilon} P(|\xi| \geq \varepsilon)}{M(e^{|\xi|})}$$

Зрозуміло, що для кожного $\varepsilon \geq 0$ ми за нерівністю Чернова отримаємо нерівність $f(\varepsilon) \leq 1$. Однак потрібно розуміти, що вище вказана оцінка не обов'язково може бути найкращою. Проблематика поглиблення відповідної оцінки для певних класичних класів випадкових величин є цілком природним та актуальним питанням.

Актуальність проблеми поглиблення нерівності Чернова в класі дискретних та абсолютно неперервних випадкових величин, продиктована тим, що нерівність Маркова породжує відому нерівність Чебишева [3], яка в свою чергу дозволяє довести ряд граничних ймовірнісних законів (зокрема законів великих чисел). Причому дана нерівність не тільки дозволяє довести відповідний закон, а і індефікує асимптотику наближення до граничного розподілу за ймовірністю.

Під поглибленням нерівності Чернова ми розуміємо знаходження сталої $A < M(e^{|\xi|})$ такої, що для кожного додатного ε:

$$P(|\xi| \geq \varepsilon) \leq \frac{A}{e^{\varepsilon}}$$

2. Аналіз досліджень і публікацій

Про можливість покращення нерівності Маркова-Чебишева було відзначено в роботі [3, с.105]. Покращення нерівності Маркова для деяких випадкових розподілів було побудоване в роботі [4, с.95].

3. Мета статті: поглибити нерівність Чернова для геометричного розподілу. Результати дослідження є актуальними та можуть бути використані при викладанні спец курсу з теорії ймовірностей та теорії випадкових процесів.

4. Поглиблення нерівності Чернова.

Для початку нагадаємо саму нерівність Чернова яка має вигляд:

$$P(|\xi| \geq \varepsilon) \leq \frac{M(e^{|\xi|})}{e^{\varepsilon}}$$

Відповідну нерівність достатньо легко отримати з самої нерівності Маркова

$$P(|\xi| \geq \varepsilon) = P\left(e^{|\xi|} \geq e^{\varepsilon}\right)$$

шляхом підстановки в нерівності

$$P(|\alpha| \geq \varepsilon) \leq \frac{M(|\alpha|)}{\varepsilon}$$

Відповідно

$$\alpha = e^{|\xi|}$$

Розглянемо функцію:

$$F(\varepsilon) = e^{\varepsilon} P(|\xi| \geq \varepsilon)$$

Зрозуміло, що за нерівністю Чернова ми матимемо оцінку типу:

$$F(\varepsilon) = e^{\varepsilon}P(|\xi| \geq \varepsilon) \leq M(e^{|\xi|})$$

Позначимо відповідно

$$A = \sup_{\varepsilon \in R_+} e^{\varepsilon}P(|\xi| \geq \varepsilon)$$

Зрозуміло, що якщо виконується нерівність:

$$A < M(e^{|\xi|})$$

То ми можемо говорити про поглиблення нерівності Чернова, яке має вигляд:

$$P(|\xi| \geq \varepsilon) \leq \frac{A}{e^{\varepsilon}}$$

Розглянемо геометричний розподіл з параметром 0,5.

$$\xi \in G_{0,9}$$

В даному випадку випадкова величина набуває значень $0,1, \dots, n,$ з ймовірностями $0.9, 0.9 * 0.1^1, \dots, 0.9 * 0,1^n$, ...відповідно.

Таблиця розподілу в цьому випадку має наступний вигляд:

ξ	0	1	...	n	...
	0.9	$0.9 * 0.1^1$	...	$0.9 * 0,1^n$	...

Перевіримо нормуючу властивість відповідного розподілу

Input interpretation

$$\sum_{n=0}^{\infty} 0.9 \times 0.1^n$$

Infinite sum

$$\sum_{n=0}^{\infty} 0.9 \times 0.1^n = 1$$

Добре відомо [2, с 25], що

$$M(\xi) = (1 - \lambda)\lambda^{-1}$$

та

$$D(\xi) = (1-\lambda)\lambda^{-2}.$$

В нашому випадку ми маємо:

$$M(\xi) = \frac{1}{9}$$

та відповідно дисперсія дорівнює

$$D(\xi) = \frac{10}{81}.$$

Порахуємо значення ймовірностей у відповідній таблиці розподілу для перших десяти значень, для цього скористаємось командою

table of 0.9*0.1^x from 0 to 9

Input

Table[0.9×0.1^x, {x, 0, 9}]

Result

x	0.9×0.1^x
0	0.9
1	0.09
2	0.009
3	0.0009
4	0.00009
5	$9. \times 10^{-6}$
6	$9. \times 10^{-7}$
7	$9. \times 10^{-8}$
8	$9. \times 10^{-9}$
9	$9. \times 10^{-10}$

Рис 1. Десять перших ймовірностей для розподілу $G_{0.9}$.

Побудуємо функцію розподілу для випадкової величини, яка має геометричний розподіл з параметром 0,9:

Маємо:

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0, x \in (-\infty; 0] \\ 0{,}5, \qquad x \in (0; 1] \\ 0{,}5 + 0{,}25, x \in (1; 2] \\ 0{,}5 + 0{,}25 + 0{,}125, x \in (2; 3] \\ 0{,}5 + 0{,}25 + 0{,}125 + 0{,}0625, x \in (3; 4] \\ \ldots \end{cases}$$

В спрощеному вигляді маємо:

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0, x \in (-\infty; 0] \\ 0{,}5, \qquad x \in (0; 1] \\ 0{,}75, x \in (1; 2] \\ 0{,}875, x \in (2; 3] \\ 0.9375, x \in (3; 4] \\ \ldots \end{cases}$$

Input

$$\begin{cases} 0 & x \le 0 \\ 0.5 & 0 < x \le 1 \\ 0.75 & 1 < x \le 2 \\ 0.875 & 2 < x \le 3 \\ 0.9375 & 3 < x \le 4 \end{cases}$$

Plots

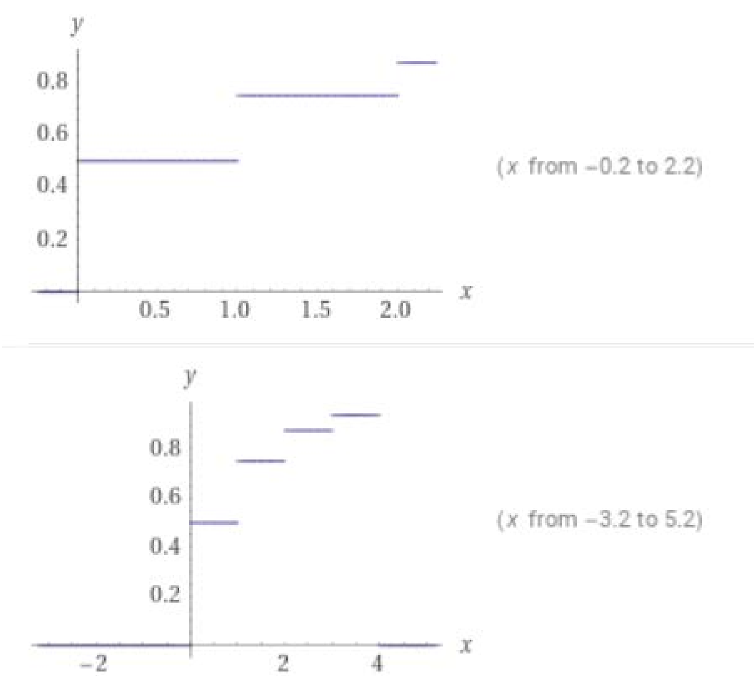


Рис 2. Графік $F_\xi(x)$ для $\xi \in G_{0.9}$.

Для побудови ми використали команду в сервісі Wolfram|Alpha:

Piecewise[{{0, x<= 0},{0.5, 0<x<=1}, {0.75, 1<x<=2},{0.875, 2<x<=3}, {0.9375, 3<x<=4}}] from -1 to 3

Знайдемо аналітичний вигляд для відповідної оціночної функції. Він має наступну структуру:

$$F(t) = e^t P(|\xi| \geq t) = 0.9e^t(\sum_{n}^{+\infty} 0{,}1^k)$$

при умові що, виконується співвідношення:

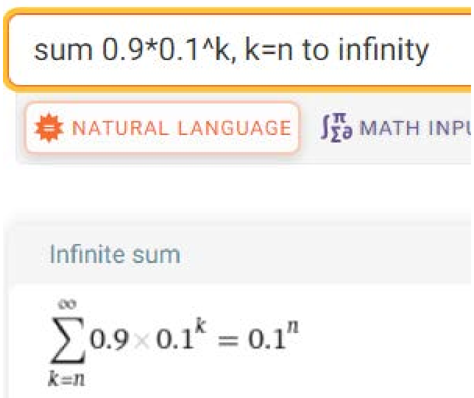
$$t \in (n-1; n]$$

Зрозуміло, що

$$\sum_{n}^{+\infty} 0{,}9 \cdot 0{,}1^k = 0{,}5^n$$

В цьому можливо переконатись у сервісі викликавши команду:

sum 0.9*0.1^k, k=n to infinity



Зрозуміло, що на проміжку $(n-1; n]$ функція $F(t) = e^t P(|\xi| \geq t)$ набуває найбільшого значення, що дорівнює:

$$0{,}1^n e^n = (0{,}1e)^n$$

Як вже зазначалось,

$$0{,}1e \approx 0{,}2718$$

Таким чином, маємо:

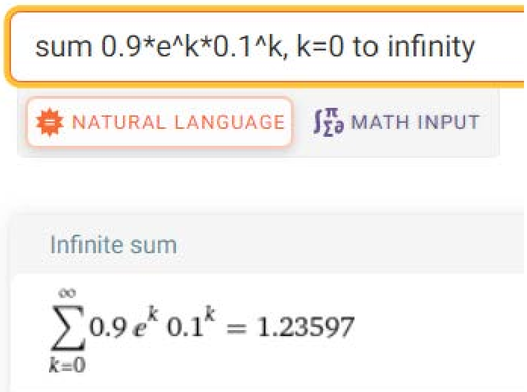
$$A = \sup_{\varepsilon \in R_+} e^{\varepsilon} P(|\xi| \geq \varepsilon) = 0{,}1e.$$

З іншого боку маємо:

$$M\left(e^{|\xi|}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} 0{,}9 * e^{n} * 0{,}1^{n} = \frac{0{,}9}{1 - 0{,}1e}$$

Відповідні викладки можливо перевірити використовуючи команду:

sum 0.9*e^k*0.1^k, k=0 to infinity



5. Висновки та перспективи наступних досліджень

З відповідного аналізу видно, що нерівність Чернова ***для геометричного*** з параметром 0,9 уточнена може бути, причому відповідне поглиблення має вигляд:

$$P(|\xi| \geq \varepsilon) \leq \frac{0{,}1e}{e^{\varepsilon}}$$

в той час як стандартний варіант має вигляд:

$$P(|\xi| \geq \varepsilon) \leq \frac{\frac{0{,}9}{1 - 0{,}1e}}{e^{\varepsilon}}$$

Подальші дослідження можуть бути присвячені аналізу відповідної проблематики по відношенню до класичних сингулярних ймовірнісних розподілів, зокрема розподілу Кантора, Салема.

Список літератури

1. Булинский А.В, Ширяев А.Н. Теория случайных процессов. Физматлит, 2005. – 359 с.
2. Вентцель А. Д. Курс теории случайных процессов. М.: Наука, −1975. − 320 с.
3. Гнеденко Б.В. Курс теории вероятностей. –М.: Наука, 1988. – 448 с.
4. Гихман И.И., Скороход А.В., Ядренко М.И. Теория вероятностей и математическая статистика. – К.: Вища шк., 1988. – 439 с.
5. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. – М.: Мир, 1984. – Т. 1. – 527 с., Т. 2. – 751 с.