УДК 519.21

АНАЛІЗ АСИМПТОТИКИ ЗБІЖНОСТІ В ТЕОРЕМІ ЛЕВІ ДЛЯ РОЗПОДІЛУ БЕРНУЛЛІ

Бабій Валерія

Науковий керівник: докт.-ф.-м. наук, професор Плічко А.М.

Центральноукраїнський державний університет імені Володимира Винниченка, м. Кропивницький, Україна

Анотація. Робота присвячена аналізу оцінок асимптотики збіжності в законі великих чисел у формі Хінчина для послідовності випадкових величин, які є незалежними в сукупності та мають асиметричний розподіл Бернуллі. Акцент здійснюється як на збіжність поточкового плану так і на рівномірну збіжність. Побудовано кількісні характеристики швидкості збіжності послідовності характеристичних функцій до характеристичної функції граничного розподілу. Встановлено зв'язок між питанням рівномірної збіжності значень модуля харакеристичної функції та класичними фактами теорії діофантових наближень, зокрема теоремою Кронекера.

Ключові слова: характеристичні функції, закон великих чисел, ймовірнісний розподіл, функція розподілу, щільність розподілу, ймовірність події, теорема Леві, ймовірнісний простір.

Analysis of the asymptotic convergence in levy's theorem for the bernoulli distribution

O Makarchuk, V Babii

Scientific supervisor: Doctor of Physics and Mathematics Science Plichko A.M.

Volodymyr Vynnychenko Ukrainian State University, Kropyvnystky, Ukraine

Annotation. The work is devoted to the analysis of estimates of convergence asymptotics in the law of large numbers in the form of Khinchin for a sequence of random variables that are independent in the aggregate and have an asymmetric Bernoulli distribution. Emphasis is placed on both point plan convergence and uniform convergence. Quantitative characteristics of the *speed of convergence of the sequence of characteristic functions to the characteristic function of the marginal distribution are constructed.*

Key words: characteristic functions, law of large numbers, probability distribution, distribution function, distribution density, event probability, Levy's theorem, probability space.

1. Постановка проблеми.

Характеристичні функції випадкових величин є важливим елементом в теорії ймовірностей і відграють важливу роль в доведенні теорем ймовірнісного характеру для випадкових послідовностей або збіжних ймовірнісних рядів.

Для випадкової величини ξ під характеристичною функцією ми розуміємо математичне сподівання від випадкової величини $e^{i\xi t}$. Таким чином для характеристичної функції ми маємо наступне співвідношення:

$$f_\xi(t) = M\left(e^{i\xi t}\right).$$

Класично, як завжди під i ми розуміємо комплексну одиницю: $i = \sqrt{-1}.$

Широке використання характеристичні функції в теорії ймовірності мають якраз в напрямі доведення ймовірнісних теорем граничного типу, а саме: законів великих чисел, центральних граничних теорем тощо.

Особливу роль в доведенні граничних теорем на основі апарату характеристичних функцій відіграє так звана теорема Поля Леві, яку ще називають як теорему про неперервність. Вона стверджує, що якщо послідовність характеристичних функції збігається поточково до характеристичної функції деякої випадкової величини то відповідно послідовність також збігається до відповідної випадкової величини за розподілом. Також відомо, що якщо деяка стохастична послідовність збігається за розподілу до випадкової величини, що має вироджений розподіл то відповідно послідовність збігається до відповідної випадкової величини за ймовірністю.

Останні дві теореми відіграють ключову роль в доведенні відповідних граничних ймовірнісних теорем. Зрозуміло, що цілком природним питанням є дослідження асимптотики збіжності до відповідних граничних розподілів у теоремі Леві.

Таким чином, закон великих чисел ***у формі Хінчина*** має наступний вигляд:

Якщо $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ *– послідовність однаково розподілених незалежних в сукупності випадкових величин, які є абсолютно інтегровними ,то*

$$s_n = \frac{\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n}{n} \xrightarrow{P} M(\xi_1).$$

За теоремою Леві поточково виконується наступне граничне співвідношення:

$$f_{s_n}(t) \to f_\tau(t)(n \to +\infty)$$

Цілком природною є проблема дослідження того, чи має місце рівномірна збіжність в останній умові.

2. Аналіз досліджень і публікацій

Актуальність відповідної проблеми в контексті теорії випадкових процесів було відзначено в роботі [5, с.56]. Проблема побудови кількісних характеристик збіжності характеристичних функцій до відповідних характеристичних функцій граничних розподілів також має відношення до теорії моделювання випадкових величин [4, с.63].

3. Мета статті: оцінити асимптотику збіжності в теоремі Леві для ЗВЧ у формі Хінчина для доданків, що мають біноміальний розподіл. Результати дослідження є актуальними та можуть бути використані при викладанні спец курсу з теорії ймовірностей та теорії випадкових процесів.

4. Оцінка асимптотики збіжності до характеристичної функції граничного розподілу.

Розглянемо стохастичну випадкову величину ξ яка набуває значень 1 та 2 з ймовірностями 0,4 та 0,6 відповідно.

Знайдемо числові характеристики випадкової величини.

$$M_\xi = 1 \cdot 0{,}4 + 2 \cdot 0{,}6 = 1{,}6.$$

$$M_{\xi^2} = 1^2 \cdot 0{,}4 + 2^2 \cdot 0{,}6 = 2{,}8.$$

$$D_\xi = M_{\xi^2} - M_\xi^2 = 2{,}8 - 1{,}6^2 = 0{,}24.$$

Знайдемо характеристичну функцію нашої випадкової величини. Знайдемо розподіл випадкової величини $e^{i\xi t}$. Відповідна комплекснозначна випадкова величина набуває значень e^{it} та e^{2it}з ймовірностями з ймовірностями 0,4 та 0,6 відповідно. Таким чином, таблиця розподілу для $e^{i\xi t}$ має вигляд:

$e^{i\xi t}$	e^{it}	e^{2it}
	0,4	0,6

В подальшому будемо використовувати відому формулу Ейлера:

$$e^{it} = \cos(t) + isin(t).$$

Таким чином маємо:

$$f_\xi(t) = 0{,}4e^{it} + 0{,}6e^{2it}$$

Знайдемо дійсну та уявну частини відповідної характеристичної функції.

Відповідна дійсна частина:

$$Re\left(f_\xi(t)\right) = 0{,}4\cos(t) + 0{,}6\cos\,(2t)$$

Уявна відповідна частина:

$$Im\left(f_\xi(t)\right) = 0{,}4\sin(t) + 0{,}6sin\,(2t)$$

У нашому випадку

$$\frac{\xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_n}{n} \xrightarrow{P} \tau,$$

де випадкова величина τ має вироджений розподіл з параметром 1,6.

Відповідна характеристична функція випадкової величини має вигляд:

$$f_\tau(t) = \cos(1{,}6t) + isin(1{,}6t)$$

Позначимо:

$$s_n = \frac{\xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_n}{n}$$

Враховуючи мультиплікативну властивість характеристичної функції маємо:

$$f_{s_n}(t) = \prod_{j=1}^{n} f_{\xi_j}\left(\frac{t}{n}\right) = (0{,}4e^{\frac{it}{n}} + 0{,}6e^{\frac{2it}{n}})^n$$

Проаналізуємо більш детальніше питання поточкової та рівномірної збіжності.

Нагадаємо, що під поточковою збіжність ми розуміємо виконання рівності

$$f_{s_n}(t) \to f_\tau(t)(n \to +\infty)$$

для кожного дійсного значення змінної t.

Рівномірна збіжність в нашому випадку означає, що для кожного $\varepsilon > 0$ існує номер N такий, що

$$|f_{s_n}(t) - f_\tau(t)| < \varepsilon$$

для кожного натурального $n > N$ та кожного дійсного значення змінної t.

Поточкова збіжність гарантується теоремою Леві. Перейдемо до аналізу рівномірної збіжності. Для цього логічно проаналізувати графіки дійсної та уявних частин функцій

$$h_n(t) = f_{s_n}(t) - f_\tau(t) =$$

$$= (0{,}4e^{\frac{it}{n}} + 0{,}6e^{\frac{2it}{n}})^n - \cos(1{,}6t) - isin(1{,}6t)$$

Рівномірної збіжності не прослідковується. Відповідний факт можливо обгрунтувати наступним шляхом. Нехай $t = n\sqrt{2}$, відповідно маємо:

$$h_n(n\sqrt{2}) = f_{s_n}(n\sqrt{2}) - f_\tau(n\sqrt{2}) =$$

$$= (0{,}4e^{i\sqrt{2}} + 0{,}6e^{i\sqrt{2}})^n - \cos(n\sqrt{2}) - isin(n\sqrt{2})$$

Зрозуміло, що

$$(0{,}4e^{i\sqrt{2}} + 0{,}6e^{i\sqrt{2}})^n \to 0(n \to +\infty)$$

За рахунок теореми Кронекера послідовність $n\sqrt{2}$ є всюду щільною на числовій прямій, тому для деякої зростаючої послідовності натуральних чисел a_n виконується умова:

$$\cos(a_n\sqrt{2}) + isin(a_n\sqrt{2}) \to 1(n \to +\infty).$$

Таким чином, проаналізуємо питання збіжності принаймні на періоді характеристичної функції випадкової величини $f_\tau(t) = \cos(1{,}6t) + isin(1{,}6t)$.

Відповідний період, очевидно дорівнює

$$T = \frac{2\pi}{1{,}6} = \frac{5\pi}{4}$$

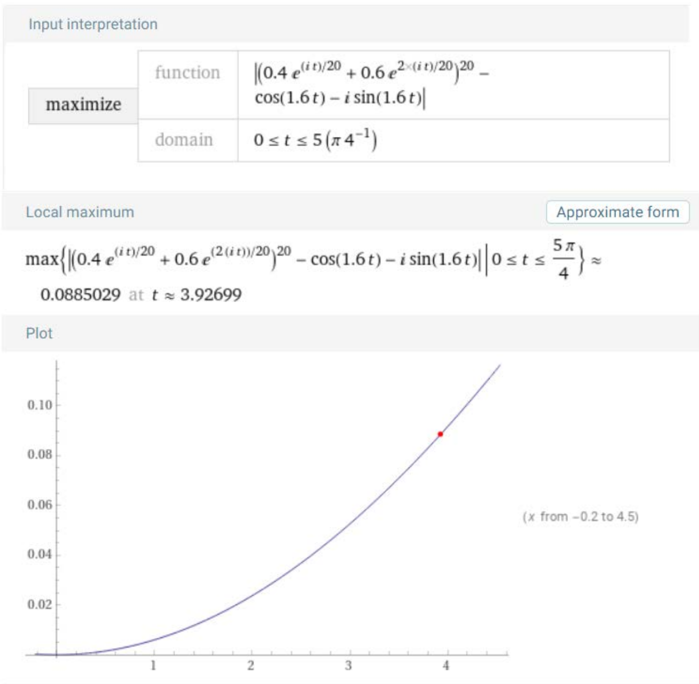

Рис 1.Графік $|f_{s_n}(t) - f_\tau(t)|$ *при* $n = 20$

Таким чином, розглянемо питання рівномірної збіжності на відрізку $t \in \left[0; \frac{5\pi}{4}\right]$.

В даному випадку розглянемо величину

$$\alpha_n = \max_{t \in [0; \frac{5\pi}{4}]} |f_{s_n}(t) - f_\tau(t)|$$

Повторюючи відповідну процедуру можливо отримати наступну сукупність значень та зробити відповідний висновок.

Таблиця 1.Значення $\alpha_n = \max_{t \in [0; \frac{5\pi}{4}]} |f_{s_n}(t) - f_\tau(t)|$

n	$\alpha_n = \max_{t \in [0; \frac{5\pi}{4}]} \lvert f_{s_n}(t) - f_\tau(t) \rvert$
10	0,1036
20	0,0885
30	0,0627
40	0,04862
50	0,0363

У даному випадку прослідковується чітка асимптотика збіжності значень $f_{s_n}(t)$ на відрізу $\left[0; \frac{5\pi}{4}\right]$ до відповідних значень $f_\tau(t)$ на тому ж відрізку, що дозволяє зробити теоретичний висновок.

5. Висновки та перспективи наступних досліджень

Таким чином, для закону великих чисел у формі Хінчина по відношенню до випадкової величини ξ, яка набуває значень 1 та 2 з ймовірностями 0,4 та 0,6 та теореми Леві не прослідковується рівномірна збіжність відповідної послідовності характеристичних функції до граничної характеристичної функції. Поточкова збіжність виконується і гарантується безпосередньо теоремою Леві. Рівномірна збіжність прослідковується у випадку обмеження множини значень аргументів характеристичних функцій до відрізку $\left[0;\frac{5\pi}{4}\right]$. Величини максимальних значень відхилень помірно прямують до нуля практично за лінійним законом.

Майбутні дослідження можуть бути присвячені аналізу відповідної проблематики по відношенню до сингулярних ймовірнісних розподілів, які мають неперервну функцію розподілу, що має похідну рівну нулю майже скрізь.

Список літератури

1. Аверина Т.А. Верификация численных методов решения систем со случайной структурой. − Новосибирск: Новосибирский гос. ун-т (НГУ), 2018. − 178 с.
2. Аверина Т.А. Статистическое моделирование решений стохастических дифференциальных уравнений и систем со случайной структурой – Новосибирск: СО РАН, 2019. − 350 с.
3. Гасников А.В., Горбунов Э.А., Гуз С.А. Случайные процессы. – М.: МФТИ, 2019. − 285 с.
4. Гельгор А.Л., Горлов А.И., Попов Е.А. Методы моделирования случайных величин и случайных процессов. − СПб.: Изд-во Политехнического университета, 2017. −217 с.
5. Зорин А.В., Зорин В.А., Пройдакова Е.В., Федоткин М.А. Введение в общие цепи Маркова. – Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2018. – 51 с.