УДК 330.4:378

АЛГЕБРАЇЧНІ ФУНКЦІЇ У ШКІЛЬНОМУ КУРСІ ЕКОНОМІКИ

Буц Катерина

Науковий керівник: доктор історичних наук, професор Пасічник Н.О.

Центральноукраїнський державний університет імені Володимира Винниченка, м. Кропивницький, Україна

У статті обґрунтовано важливість застосування математичного моделювання у шкільному курсі економіки. Досліджено використання алгебраїчних функцій у шкільному курсі економіки, що дає можливість вчителю формувати математичну та економічну компетентності старшокласників, сприяти їхньому всебічному розвитку. Наведено приклад економічної задачі інтегративного змісту математичної тематики з наочним, детальним розв'язанням. Запропоновані матеріали доцільно використовувати при підготовці вчителя до інтегрованого уроку як з алгебри і геометрії, так і з економіки.

Ключові слова: *функція, графік функції, математичне моделювання, інтеграція.*

Functions and graphs of functions in economics

K. Buts

Scientific supervisor: doctor of historical sciences, professor Pasichnyk N.O.

The Volodymyr Vynnychenko Central Ukrainian State University, Kropywnytsky, Ukraine

The importance of applying mathematical modeling in the school course of economics is substantiated in this article. The use of functions and their graphs in the school course of economics was studied, which enables the teacher to form the mathematical and economic competence of high school students, to promote their comprehensive development. An example of an economic problem of the integrative content of mathematical topics with a visual detailed solution is given. The given materials can be expedient and useful in preparing the teacher for an integrated lesson in both algebra and geometry, as well as in economics, and its implementation.

Key words*: a function, a graph of a function, mathematical modeling, integration.*

Постановка проблеми. У шкільному курсі економіки у багатьох темах використовуються математичні методи й моделі як природні й необхідні елементи. Використання математики в економіці дає змогу виділити й формально описати найбільш важливі, істотні зв'язки економічних змінних і об'єктів, дозволяє точно й компактно формулювати базові положення економічної теорії, економічні явища й процеси, можливості практичного застосування теоретичних положень і робити аргументовані висновки [3].

На жаль, недостатньо навчально-методичної літератури, де детально аналізуються математичні методи й моделі при розв'язуванні економічних задач. Проте, формування ключових компетентностей при вивченні предмету «Економіка» передбачає розвиток математичної компетентності, яка охоплює уміння застосовувати математичний інструментарій при аналізі економічних явищ і процесів, а також при розв'язанні задач економічного змісту. Тому досить важливо показувати учням на уроках інтеграцію математики й економіки.

Аналіз досліджень і публікацій. Значний вклад щодо висвітлення математичних методів при вивченні шкільного курсу економіки, підготовці учнів до олімпіад з економіки здійснили українські науковці: І. Родіонова, Г. Гронтковська, А. Косік, О. Олійник, І.Тимченко, Л.Крупська та ін. Цікавий підхід стосовно використання інтегративних зв'язків між математикою, економікою та ІКТ для формування у старшокласників умінь розв'язувати та досліджувати математичні задачі інтегративного змісту висвітлений у працях Н. Пасічник, Р. Ріжняка, К. Акбаш [3;4]. Утім, динамічний характер розвитку і математики, і економіки дозволяє розглядати значні можливості застосування математичних методів в курсі «Економіки» в цілому, а також деталізувати окремі з них.

Мета даної **статті:** представити стислий виклад застосування алгебраїчних функцій у шкільному курсі економіки, навести приклад економічної задачі інтегративного змісту математичної тематики з наочним, детальним розв'язанням, щоб показати можливість формування у старшокласників цілісного уявлення про ту чи іншу задачу, інтеграцію між математикою та економікою.

Виклад основного матеріалу (результатів) дослідження. Вперше на уроках економіки учні зустрічаються з алгебраїчними функціями у 10 класі, під час вивчення другої теми (за підручником Л. Крупської, І. Тимченко, Т. Чорної [1]), яка має назву: «Зміст основних економічних явищ та процесів». У підтемі

«Економічна ефективність: зміст, способи оцінювання» розглядається крива виробничих можливостей, або її називають кривою трансформації, кожна точка якої показує максимальний обсяг виробництва будь-яких двох благ, послуг чи товарів. Щоб побудувати криву виробничих можливостей, розглянемо комбінацію двох благ, які з залученням обмежених ресурсів, можуть бути вироблені за умов повної зайнятості й повного обсягу виробництва.

Нехай на осі ОХ буде представлено обсяг виробництва ноутбуків, а на осі ОУ – телефонів. Точками А, D, В, С, Е, F позначимо різні можливі варіанти виробництва телефонів та ноутбуків за наявних ресурсів. Далі сполучаємо дані точки, в результаті отримаємо криву виробничих можливостей (Рис.1).

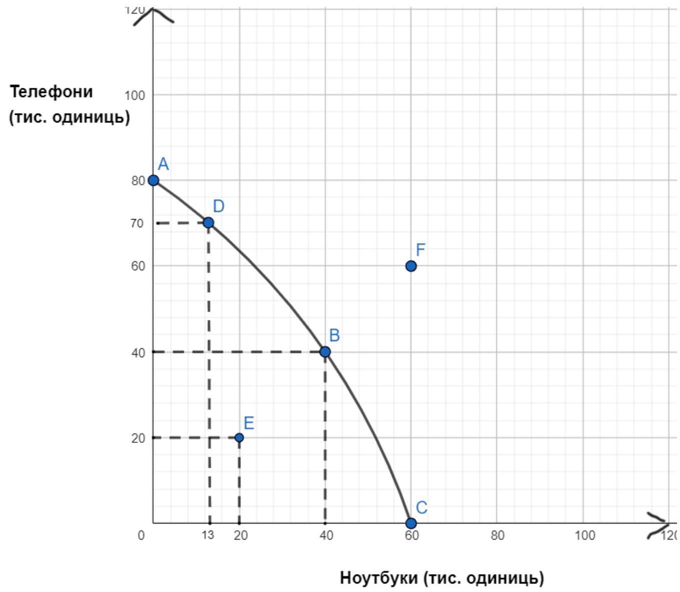

Рис. 1

Під час руху по кривій, спостерігаємо різні варіанти комбінації ресурсів. У точці D ресурси використовуються так, що з них буде вироблено 70 тис. одиниць телефонів і 13 тис. одиниць ноутбуків. Варіант у точці В передбачає поділ ресурсів таким чином, що буде вироблено по 40 тис. одиниць як телефонів, так і ноутбуків. Точка А показує, що буде вироблено 80 тис. одиниць телефонів, але при цьому всі ресурси будуть задіяні і виробництво ноутбуків стане неможливим. А точка С є ілюстрацією оберненої ситуації, коли вироблятиметься 60 тис. одиниць ноутбуків, і зовсім не вироблятимуться телефони. Точка Е означає, що ресурси будуть використані не повністю, що є небажаним для суспільства. Вихід із цього становища — покращення структури виробництва, застосування інших організаційних форм і систем управління тощо.

Точка F міститься поза межею виробничих можливостей, тобто наявних виробничих ресурсів за даної технології їх використання недостатньо для забезпечення цього рівня виробництва.

Крива $y = f(x)$, що з'єднує дві точки А(0; max (телефони тис. одиниць)) і С (max (ноутбуки тис. одиниць);0) на осях координат, строго монотонно спадна функція, а значить, і неперервна на відрізку $\left[0;\ max\left(\text{ноутбуки (тис. одиниць)}\right)\right]$; є опуклою, і її можна отримати з повного перерозподілу ресурсів і їх обмеженості.

Під час вивчення учнями третьої теми з курсу економіки: «Споживач в економіці. Економічні потреби, інтереси», в підтемі: «Аналіз кривих байдужості та бюджетна обмеженість вибору споживача. Раціональний вибір споживача» [1], учні навчаються зображувати у прямокутній системі координат криві байдужості, їх аналізувати; будувати бюджетну лінію, яка відображає набори благ, які потребують однакових витрат.

У теорії споживчого попиту на два блага x та y (наприклад, досліджуване – x, і все інше – y) переваги споживача описуються кривою байдужості $U(x, y) = U_k$, а бюджетне обмеження (витрати споживача менші за його дохід) у випадку, коли споживач витрачає весь свій дохід на блага, які ми розглядаємо:

$$xp_x + yp_y = I \qquad (1),$$

де I – дохід споживача, а p_x, p_y – ціни благ x та y відповідно.

Для того, щоб побудувати графіки цих неявно заданих функцій y(x) в системі координат, де по осі OX відкладена величина блага x, а по осі OY – величина блага y, потрібно виразити в явному вигляді величину y як функцію x для двох залежностей. Зробимо це для найпростішої функції корисності $U(x, y) = xy$. Для рівня корисності U_0 та доходу I, отримаємо наступні функції: $y = \frac{U_0}{x}$, $\quad y = \frac{I}{p_y} - \frac{p_x}{p_y}x$. Графіком першої функції (кривої байдужості) буде гіпербола, а графіком іншої функції (бюджетного обмеження) – пряма лінія, що має від'ємний нахил, рівний абсолютній ціні блага x, та точку перетину з віссю ОУ $\left(\frac{I}{p_y}\right)$, яка відповідає кількості блага у, яке можна придбати по ціні p_y, якщо витратити на нього весь дохід I.

Побудуємо криву байдужості та бюджетну лінію в одній системі координат (Рис. 2.)

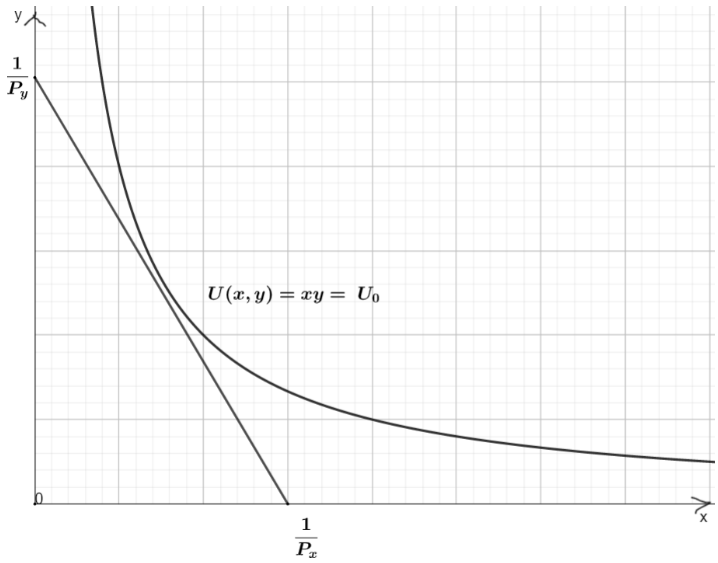

Рис. 2

Криві байдужості мають певні математичні властивості: вони є монотонно спадними функціями (коли кількість одного блага, товару, послуги збільшується, значення функції спадає); поверхні байдужості в жодному разі не перетинаються; кут нахилу поверхні байдужості до горизонтальної осі зменшується при збільшенні споживання блага, товару, послуги, величина яких відображається на цій осі. Іншими словами, поверхні байдужості зображені увігнутими графіками функцій.

Карту кривих байдужості зображено на рисунку (Рис.3).

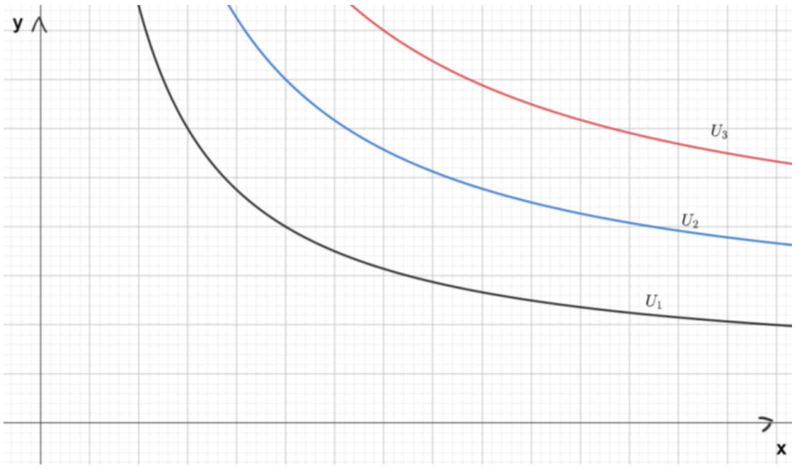

Рис. 3

Розглянемо властивості бюджетної лінії. Її положення залежить від чинників: зміни цін та зміни величини доходу. Якщо маємо відносну зміну ціни одного товару, то відповідно зміниться нахил бюджетної лінії відносно осі Оу або осі Ох. Зобразимо графік функції, де одне з благ (наприклад Х) подешевшало (Рис**.** 4). Тобто, якщо розглядати дану ситуацію графічно, то відбудеться зміна кута нахилу бюджетної лінії.

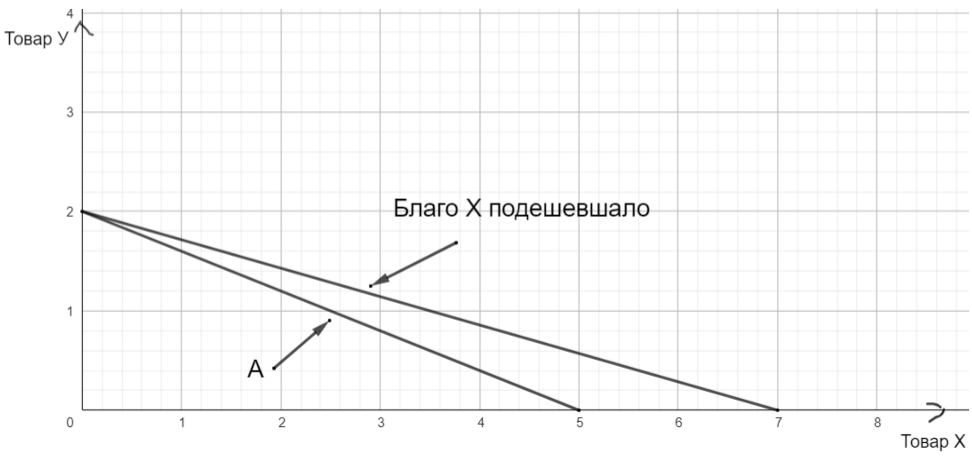

Рис.4

За зміни доходу й постійних цінах розглянемо декілька випадків:

1) дохід збільшується; 2) дохід зменшується.

За умови, якщо дохід зростає або, навпаки, зменшується при незмінних цінах, то нахил бюджетної лінії залишиться незмінним, графічно – це буде паралельний зсув ліворуч або праворуч (Рис**.** 5).

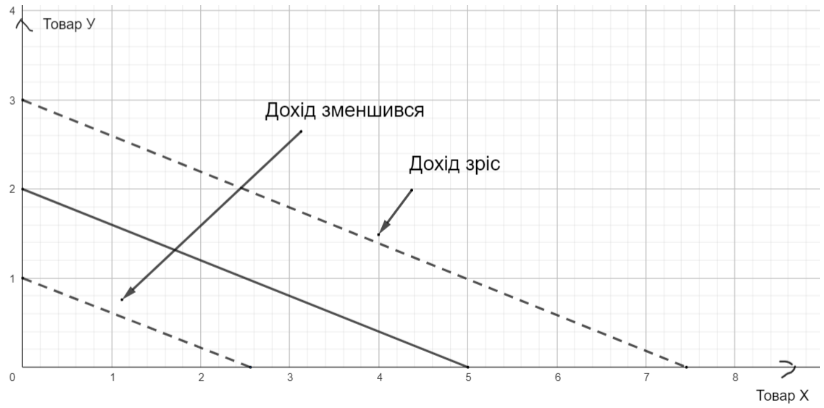

Рис.5

Також до паралельного зсуву бюджетної лінії призведе умова, що вказує на те, що пропорційна зміна цін відповідна зміні реального доходу. Бюджетна лінія зміститься ліворуч (падіння реального доходу споживачів) за умови зростання цін, при зниженні цін – праворуч (зростання реального доходу).

Багато уваги приділяється вивченню функцій та графіків функцій у темі 9: «Основні параметри ринку: попит, пропозиція, ринкова ціна» [1].

Найпростіша функція – лінійна функція, яка має вигляд $y = kx + b$.

Нехай дано дві прямі, які задані відповідними рівняннями $-3x + 2y = 4$ і $x + 2y = 12$. Перша пряма $-3x + 2y = 4$, припустимо, показує залежність товару, або блага від ціни (крива пропозиції), інша пряма $x + 2y = 12$, припустимо, показує залежність між товаром або благом, який буде придбаний і ціною (крива попиту). Завдання: визначити яку потрібно поставити ціну, щоб весь товар продався, тобто необхідно знайти точку рівноваги, рівноважну ціну.

Для цього варто розв'язати систему двох заданих рівнянь, розв'яжемо її графічним способом.

Дві прямі перетнулися в точці А, з координатами А(2;5) (Рис 6) .

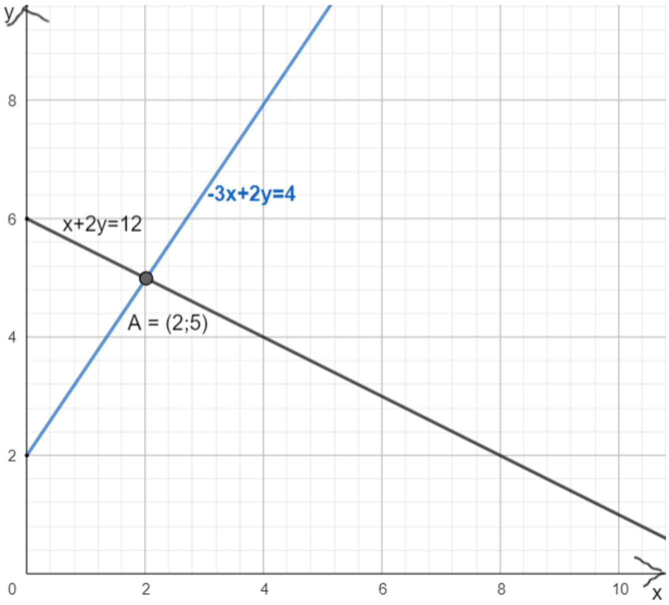

Рис. 6

Цей перетин і є розв’язком даної системи, і дає відповідь до нашої задачі, якщо y - кількість товару, а x – ціна товару.

Припустимо, що маємо якийсь товар. За конкретної ціни p за 1-цю товару через s(p) позначимо число одиниць товару, яку пропонують придбати продавці на ринку. Функція s = s(p) буде функцією пропозиції товару. Через q(p) позначимо число одиниць товару, яку бажають придбати покупці за конкретною ціною p. Функція q = q(p) - функція попиту на товар. З економічних міркувань функція пропозиції s = s(p) зростаюча, а функція попиту q = q(p) спадна. Ціну, за якої попит на певний товар дорівнює пропозиції цього товару на ринку, називають рівноважною ціною. Тобто за рівноважної ціни p* виконується рівність s(p*) = q(p*) . Точка E(p*; q*) – точка рівноваги [2, с. 13].

Знаючи математично, як будувати лінійні функції, можна з легкістю зобразити функції попиту та пропозиції на товар (Рис. 7).

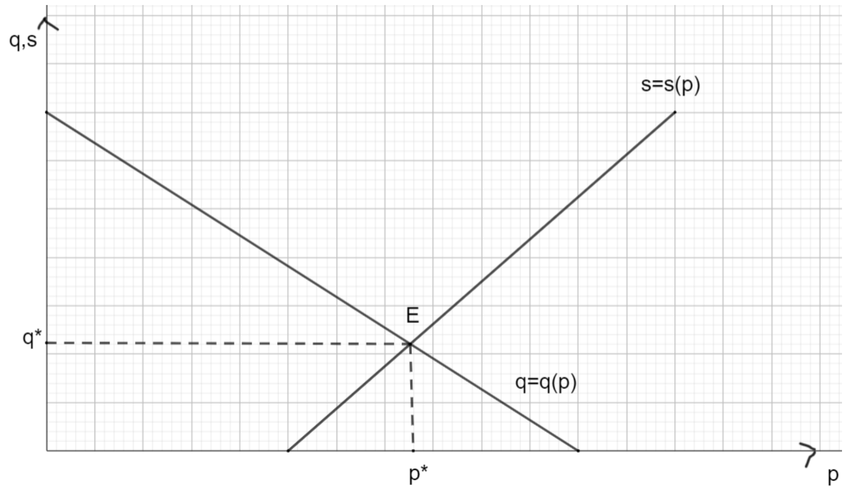

Рис. 7

Далі учні в цій темі, в підтемі: «Нецінові чинники попиту та пропозиції», також працюють з графіками, залежно від нецінових чинників рухають графіки вліво або вправо.

Також, учні в 10 класі знайомляться з залежністю величини попиту від доходу. Для прикладу розглянемо практичну задачу.

Задача. На ринку є 14 покупців яблук. Двоє готові за 1 кг яблук заплатити 10 грн., троє заплатити 12 грн. за 1 кг, п'ятеро заплатити 8 грн. за 1 кг, четверо готові віддати тільки 6 грн. за 1 кг. Побудуйте криву попиту на яблука.

Розв'язання.

Спочатку складемо шкалу попиту. Оскільки попит обмежений бюджетом, то найкраще розпочати з ціни, яка є найвищою.

Ціна – 12 грн. за 1 кг; величина попиту – 3 покупців.

Ціна – 10 грн. за 1 кг; величина попиту буде дорівнювати 2 покупцям (за умовою), і 3 покупцям, які були готові придбати яблука за вищою ціною. Тобто величина попиту дорівнюватиме 5.

Ціна – 8 грн. за 1 кг; величина попиту – 5 покупців (за умовою), додаємо ще 3 (які були готові придбати яблука по 12 грн. за 1 кг), і 2 покупця (які були готові придбати по 10 грн. за 1 кг). Виходить, величина попиту – 10.

Ціна – 6 грн. за 1 кг; величина попиту – всі покупці – 14.

Складемо шкалу попиту, з її допомогою, з легкістю побудуємо графік попиту на яблука (Таблиця 1).

Таблиця 1

Шкала попиту

Ціна (P), грн..	Величина попиту (Q), пок.
12	3
10	5
8	10
6	14

Будуємо криву попиту за відповідними точками з таблиці (Рис.9).

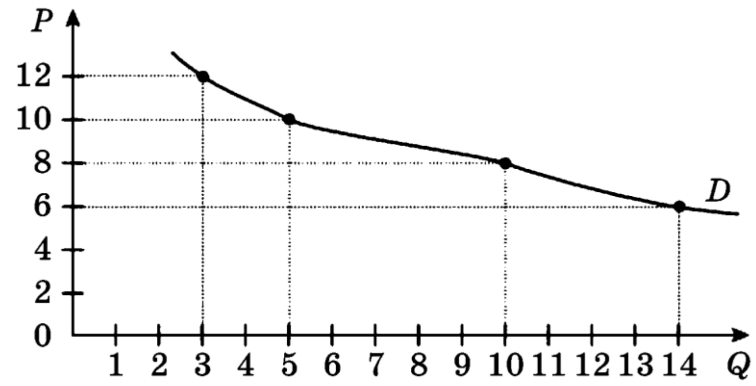

Рис.9

Висновки та перспективи подальших пошуків у напрямі дослідження.

Вивчення математичного моделювання у економіці є досить важливим, оскільки, використовуючи його можна більш точно та більш конкретно досліджувати, аналізувати, прогнозувати різні економічні процеси, і в результаті отримувати кращі результати, прибуток, запобігати кризи, великих втрат.

Таке поняття, як функція є дуже поширеним, як в математиці, так і в економіці, за допомогою якого можна моделювати різні взаємозв’язки між величинами і показниками. Для побудови та дослідження графіків функцій варто розуміти, що таке парність, нулі, періодичність, монотонність, обмеження функції, наявність у функції асимптот і оберненої функції, тобто знати властивості функцій. Розумітися на основних елементарних функціях, та їх перетвореннях.

Функції, їх графіки розглядаються учнями при вивченні основних економічних явищ та процесів, при вивченні кривої виробничих можливостей, при аналізі кривих байдужості та бюджетної обмеженості вибору споживача, а також при розгляді тем, які пов'язані з попитом та пропозицією. І в кожній з тем є задачі, які розв'язуються на основі знань з математики.

Список літератури:

1. Економіка (профільний рівень): підруч. для 10 кл. закл. заг. серед. освіти / Л.П. Крупська, І.Є. Тимченко, Т.І. Чорна. – Харків: Вид-во «Ранок», 2018. – 240 с.
2. Математичні моделі в економічних задачах. Практикум (І курс) / Уклад.: Ю.П. Буценко, О.О. Диховичний, О.А. Тимошенко. – К: НТУУ «КПІ», 2014. – 57 с.
3. Пасічник Н.О. Ріжняк Р.Я. Розв'язування математичних задач з реалізацією поліпредметних (економіка, інформатика, математика) інтегративних компонентів. *Фізико-математична освіта*. 2020. Випуск 2 (24). С. 113–122.
4. Rizhniak, R., Pasichnyk, N., Zavitrenko, D., Akbash, K., Zavitrenko, A. The Implementation of an integrative Approach to Learning with use of integrated Images. *Revista Romaneasca Pentru Educatie Multidimensionala*, 2021. 13(1).