УДК 378.016:517

ГЕНЕРАЦІЯ ЧИСЛОВИХ РЯДІВ З ВИКОРИСТАННЯМ ПОСЛІДОВНОСТЕЙ ГЕОМЕТРИЧНИХ ОБ'ЄКТІВ, ВПИСАНИХ У КВАДРАТ З ПАРАМЕТРОМ $a = 1$ В СИСТЕМІ КООРДИНАТ OXY

Дзигарська Наталя, Тураєва Ольга

Науковий керівник: канд. техн. наук, професор Корольський В. В.

Криворізький державний педагогічний університет

В статті проілюстровано процес генерації членів числових рядів на основі геометричних інтерпретацій, запропоновано алгоритм генерації числових рядів з використанням квадрата зі стороною $a = 1$, розташованого в системі координат OXY, що дозволяє створювати числові ряди з можливістю візуалізації членів ряду. Продемонстровано можливість використання різних способів генерації одного й того ж числового ряду. Проведено дослідження швидкості збігання частинних сум S_n до значення суми ряду S в залежності від зростання «n». Алгоритм одержання числових рядів можуть використовувати студенти та учні, що займаються дослідницькою діяльністю.

Ключові слова: числовий ряд, геометрична інтерпретація, збіжність ряду, генерація числових рядів, геометрична прогресія.

Generation of numerical series using sequences of geometric objects inscribed in a square with parameter $a = 1$ in the OXY coordinate system

N. Dzyharska, O. Turaieva

Scientific supervisor: Candidate of technical science, Professor Korolskyi V.V.

Kryvyi Rih State Pedagogical University

The article illustrates the process of generating members of numerical series based on geometric interpretations, offers an algorithm for generating numerical series using a square with side a=1, located in the OXY coordinate system, which allows creating numerical series with the possibility of visualizing the members of the series. The possibility of using different methods of generating the same number series is demonstrated. The speed of convergence of the partial sums S_n to the value of the sum of the series S depending on the growth of "n" was studied. The algorithm for obtaining numerical series can be used by students and students engaged in research activities.

Key words: numerical series, geometric interpretation, series convergence, generation of numerical series, geometric progression.

Розділ математичного аналізу «Ряди» є важливою складовою у змісті фундаментальної підготовки вчителів математики за спеціальністю 014.04 Середня освіта. Враховуючи цей факт, на кафедрі математики та методики її навчання систематично діє студентська наукова проблемна група «Геометрична інтерпретація числових рядів». За тематикою групи студенти досліджують алгоритми створення числових рядів з елементами візуалізації членів рядів з подальшим дослідженням рядів на збіжність і пропозиціями щодо їх включення в навчальний процес.

Питанням геометричної інтерпретації числових рядів в класичних підручниках з математичного аналізу, а також в науково-методичних виданнях, пов'язаних з числовими рядами, не приділяється увага. Але, на нашу думку, це є суттєвим недоліком у вивченні теорії числових рядів і їх практичному застосуванні.

Використання геометричних інтерпретацій числових рядів дає можливість здійснювати в навчанні дидактичний принцип візуалізації і в той же час створювати різні види числових рядів для використання на практичних заняттях, пов'язаних з дослідженням рядів на збіжність. Тому процес генерації членів числових рядів на основі геометричних інтерпретацій, який розглядається у даній статті, можна вважати актуальною дослідницькою задачею.

Генерації числових рядів на основі різних геометричних інтерпретацій в останні роки присвячені публікації: С. С. Габ [1, 2, 3], А. А. Комарова [4], В. В. Корольський [5, 6, 7], В. В. Няньчук [8], О. Ю. Примакова [9], А. М. Христюк [11, 12].

Наше дослідження генерації числових рядів базується на використанні геометричних образів (лінії, площі, об'єми), пов'язаних з послідовностями геометричних об'єктів, вписаних у квадрат з параметром $a = 1$, представленим на рис. 1.

Точки A_n, B_n, C_n розподілені відповідно на сторонах квадрата $|\overline{A_1 O}|$, $|\overline{B_1 A_1}|$, $|\overline{C_1 O}|$ за законом геометричної прогресії зі знаменником $q = \frac{1}{2}$ і мають координати: $A_n\left(\frac{1}{2^{n-1}}; 0\right)$, $B_n\left(1; \frac{1}{2^{n-1}}\right)$, $C_n\left(0; \frac{1}{2^{n-1}}\right)$, $n \in \mathbb{N}$.

Алгоритм генерації різних видів рядів передбачає наступні дії:

1) За допомогою координат послідовностей точок A_n, B_n, C_n визначаються координати послідовностей точок $\mathcal{E}_n$, N_n, K_{n+1}:

$\mathcal{E}_n\left(\frac{1}{2^{n-1}}; \frac{1}{2^n}\right)$, $N_n\left(\frac{1}{2^{n-1}}; \frac{1}{2^{n-1}}\right)$, що можна візуально спостерігати на рис. 1.

Координати точки K_{n+1} знаходяться за формулами:

$$X_{n+1} = \frac{\frac{1}{2^{n-1}}+\frac{1}{2^n}}{2} = \frac{3}{2^{n+1}};$$

$$Y_{n+1} = \frac{\frac{1}{2^{n-1}}+\frac{1}{2^n}}{2} = \frac{3}{2^{n+1}},$$

що також можна бачити на рис. 1.

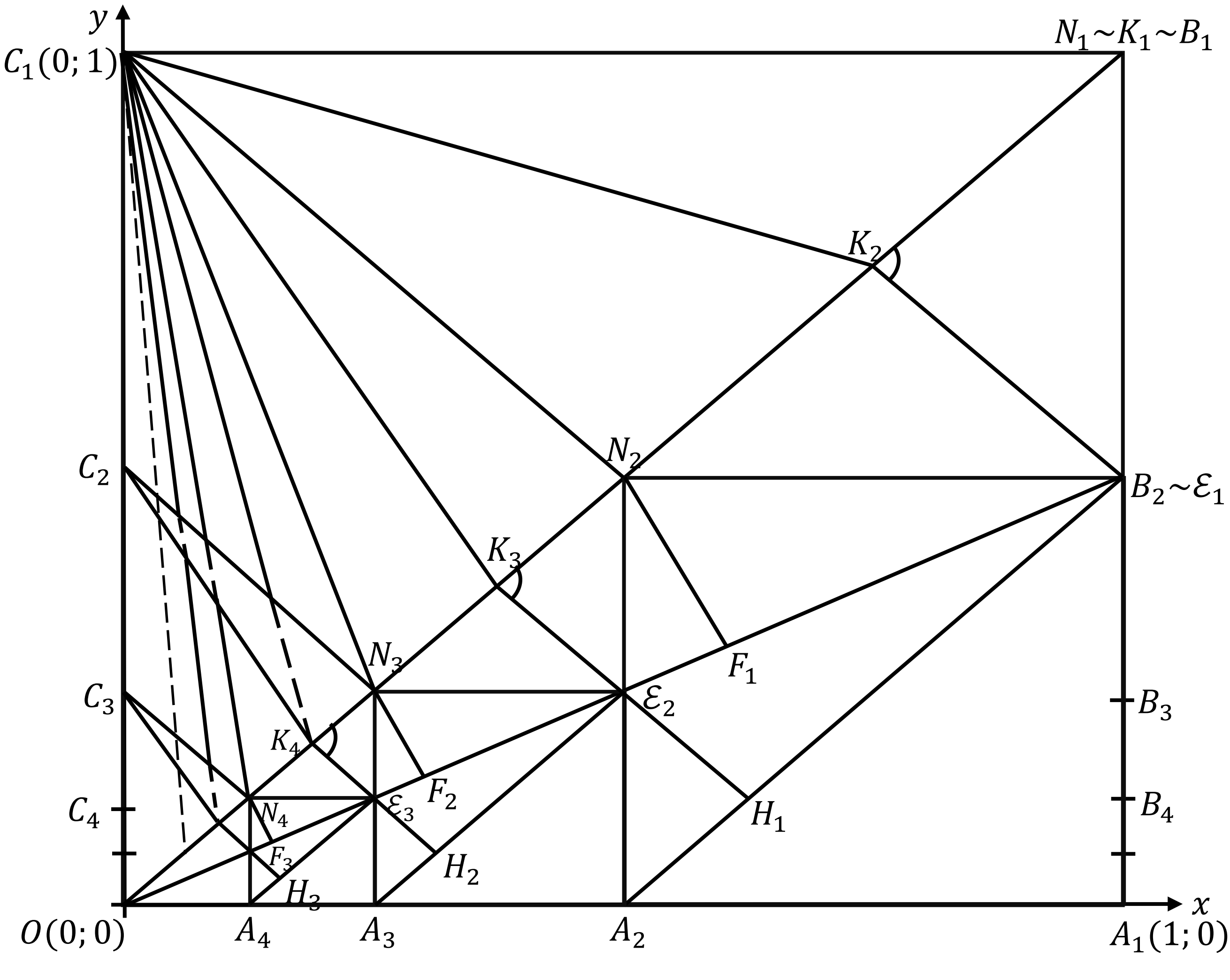

Рис. 1. Квадрат з параметром (стороною) $a = 1$

2) Обчислюється довжина послідовностей відрізків, розташованих на прямих $|\overline{OA_1}|$, $|\overline{B_1A_1}|$, $|\overline{OB_1}|$, $|\overline{O\mathcal{E}_1}|$, за допомогою яких одержуються числові ряди лінійної геометричної інтерпретації:

$$\sum_{n=1}^{\infty}|\overline{A_nA_{n+1}}| = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^{n-1}} - \frac{1}{2^n}\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n} \quad (1)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}|\overline{B_nB_{n+1}}| = \sum_{n=1}^{\infty}|\overline{A_nA_{n+1}}| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n} \quad (2)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}|\overline{\mathcal{E}_nN_{n+1}}| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}, \quad (3)$$

що візуально спостерігається на рис. 1.

За допомогою членів рядів (2) і (3) генерується ряд $\sum_{n=1}^{\infty}|\overline{N_n N_{n+1}}|$. Для цього достатньо використати теорему Піфагора (див. рис. 1):

$$\sum_{n=1}^{\infty}|\overline{N_n N_{n+1}}| = \sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{|\overline{\mathcal{E}_n N_{n+1}}|^2 + |\overline{B_n B_{n+1}}|^2} = \sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{\frac{1}{2^{2n}} + \frac{1}{2^{2n}}} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{2}}{2^n} \qquad (4)$$

Ряд (4) генерується й іншим способом, який передбачає використання відомої формули обчислення відстані між двома точками.

Відповідно за цією формулою одержуємо загальний член ряду $|\overline{N_n N_{n+1}}|$:

$$|\overline{N_n N_{n+1}}| = \sqrt{\left(\frac{1}{2^{n-1}} - \frac{1}{2^n}\right)^2 + \left(\frac{1}{2^{n-1}} - \frac{1}{2^n}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{2^{2n}} + \frac{1}{2^{2n}}} = \frac{\sqrt{2}}{2^n}.$$

Аналогічно генерується ряд $\sum_{n=1}^{\infty}|\overline{K_n K_{n+1}}|$:

$$|\overline{K_n K_{n+1}}| = \sqrt{\left(\frac{3}{2^{n+1}} - \frac{3}{2^{n+2}}\right)^2 + \left(\frac{3}{2^{n+1}} - \frac{3}{2^{n+2}}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{3}{2^{n+2}}\right)^2 + \left(\frac{3}{2^{n+2}}\right)^2} = \frac{3}{2^{n+2}}\sqrt{2} = \frac{3\sqrt{2}}{2^2}\frac{1}{2^n}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}|\overline{K_n K_{n+1}}| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{3\sqrt{2}}{2^2}\cdot\frac{1}{2^n} \qquad (5)$$

За допомогою координат $K_{n+1}\left(\frac{3}{2^{n+1}};\frac{3}{2^{n+1}}\right)$, $N_{n+1}\left(\frac{1}{2^{n-1}};\frac{1}{2^{n-1}}\right)$ і $C_1(0;1)$ генеруються наступні ряди.

$$\sum_{n=1}^{\infty}|\overline{K_{n+1} C_1}| = \sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{\left(\frac{3}{2^{n+1}} - 0\right)^2 + \left(\frac{3}{2^{n+1}} - 1\right)^2} = \sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{2\frac{3^2}{2^{2n+2}} - \frac{3}{2^{n+1}} + 1} =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{\frac{3}{2^n}\left(\frac{3}{2^{n+1}} - 1\right) + 1} \qquad (6)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}|\overline{N_{n+1} C_1}| = \sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{\left(\frac{1}{2^n} - 0\right)^2 + \left(\frac{1}{2^n} - 1\right)^2} = \sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{\frac{1}{2^n}\left(\frac{1}{2^n} - 1\right) + 1} \qquad (7)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}|\overline{K_{n+1} N_{n+1}}| = \sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{\left(\frac{1}{2^n} - \frac{3}{2^{n+1}}\right)^2 + \left(\frac{1}{2^n} - \frac{3}{2^{n+1}}\right)^2} = \sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{2}\cdot\frac{1}{2^{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2^n} \qquad (8)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}|\overline{N_n N_{n+1}}| = \sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{\left(\frac{3}{2^{n+1}} - \frac{1}{2^{n-1}}\right)^2 + \left(\frac{3}{2^{n+1}} - \frac{1}{2^{n-1}}\right)^2} = \sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{2}\cdot\frac{1}{2^{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2^n} \qquad (9)$$

Із застосуванням формули обчислення довжини відрізка прямої між двома заданими точками або за допомогою теореми Піфагора і візуалізації відповідних геометричних об’єктів на рис. 1 одержуються ряди:

$$\sum_{n=1}^{\infty}|\overline{\mathcal{E}_n A_{n+1}}| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{2}}{2^n} \qquad (10)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}|\overline{\mathcal{E}_n \mathcal{E}_{n+1}}| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{5}}{2^{n+1}} \qquad (11)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}|\overline{N_{n+1} C_n}| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{2}}{2^n} \qquad (12)$$

Примітка. Ряди (1-12) генеруються за допомогою візуалізації логіки розташування відповідних точок і відрізків прямих, що їх зв'язують. При цьому достатньо знати дві формули, що вивчаються у школі: перша формула – обчислення відстані між двома заданими точками в системі координат OXY: друга – формула Піфагора.

Для одержання інших рядів з лінійною геометричною інтерпретацією потрібні знання з аналітичної геометрії.

Розглянемо генерацію рядів, пов'язаних з довжинами висот послідовностей трикутників:

$\{\Delta\mathcal{E}_n N_{n+1}\mathcal{E}_{n+1}\}_{n=1}^{\infty}$, $\{\Delta\mathcal{E}_n\mathcal{E}_{n+1}A_{n+1}\}_{n=1}^{\infty}$, для яких висотами є відповідно $|\overline{N_{n+1}F_n}|$ і $|\overline{\mathcal{E}_{n+1}H_n}|$, що візуалізується на рис. 1.

Будемо використовувати формулу обчислення відстані заданої точки до заданої прямої:

$d = \left|\frac{Ax_0+By_0+C}{\sqrt{A^2+B^2}}\right|$, $(*)$

де: $Ax + By + C = 0$ – рівняння прямої, $(x_0; y_0)$ – координати точки M_0, що знаходиться на відстані d від прямої.

Для одержання $|\overline{N_{n+1}F_n}|$ використаємо пряму $\overline{O\mathcal{E}_1}$, рівняння якої $y = \frac{1}{2}x$ $(**)$

На відстані $|\overline{N_{n+1}F_n}|$ від прямої $(**)$ знаходяться точки послідовності $\{N_{n+1}\}_{n=1}^{\infty}$. Для обчислення $|\overline{N_{n+1}F_n}|$ використовуємо формулу $(*)$:

$$|\overline{N_{n+1}F_n}| = \left|\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2^n}-1\cdot\frac{1}{2^n}}{\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+(-1)^2}}\right| = \left|\frac{-\frac{1}{2^{n+1}}}{\sqrt{\frac{5}{4}}}\right| = \frac{2}{\sqrt{5}}\cdot\frac{1}{2^{n+1}} = \frac{2\sqrt{5}}{2}\cdot\frac{1}{2^{n+1}}.$$

Одержуємо ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{5}}{5}\cdot\frac{1}{2^n} \tag{13}$$

Аналогічно одержуємо ряд послідовностей відрізків $|\overline{\mathcal{E}_{n+1}H_n}|$, враховуючи, що має місце послідовність рівнянь $y = x - \frac{1}{2^{n+1}}$ $(***)$, $n \in \mathbb{N}$ на відстані від яких знаходяться точки $\mathcal{E}_{n+1}\left(\frac{1}{2^{n+1}};\frac{1}{2^{n+1}}\right)$, тому за формулою $(*)$ одержуємо:

$$|\overline{\mathcal{E}_{n+1}H_n}| = \left|\frac{1\cdot\frac{1}{2^{n+1}}-1\cdot\frac{1}{2^{n+1}}-\frac{1}{2^{n+1}}}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}\right| = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2^{n+1}} = \frac{\sqrt{2}}{4}\cdot\frac{1}{2^n}.$$

Маємо ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}|\overline{\mathcal{E}_{n+1}H_n}| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{2}}{4}\cdot\frac{1}{2^n} \quad (14)$$

Генерацію рядів можна продовжити, якщо використати ряди (13) і (14) та теорему Піфагора:

$$\sum_{n=1}^{\infty}|\overline{\mathcal{E}_{n+1}F_1}| = \sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{|\overline{N_{n+1}\mathcal{E}_{n+1}}|^2 - |\overline{N_{n+1}F_n}|^2} = \sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{\left(\frac{1}{2^{n+1}}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{5}}{5}\cdot\frac{1}{2^n}\right)^2} =$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\sqrt{\frac{1}{4}-\frac{1}{5}} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2\sqrt{5}}\cdot\frac{1}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{5}}{10}\cdot\frac{1}{2^n} \quad (15)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}|\overline{\mathcal{E}_nF_n}| = \sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{\left(\frac{1}{2^n}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{5}}{5}\cdot\frac{1}{2^n}\right)^2} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\cdot\frac{2\sqrt{5}}{5} \quad (16)$$

Зрозуміло, що сума рядів (15) і (16) дорівнює ряду (11), що має візуальне підтвердження і просто доводиться за допомогою загальних членів рядів (15) і (16).

Аналогічно генеруються ряди: $\sum_{n=1}^{\infty}|\overline{A_{n+1}H_n}|$ і $\sum_{n=1}^{\infty}|\overline{\mathcal{E}_nH_n}|$.

$$\sum_{n=1}^{\infty}|\overline{A_{n+1}H_n}| = \sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{\left(\frac{1}{2^{n+1}}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{5}\cdot\frac{1}{2^n}\right)^2} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\sqrt{1-\frac{1}{2}} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2^n} \quad (17)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}|\overline{\mathcal{E}_nH_n}| = \sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\cdot\frac{1}{2^n}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2^n}\right)^2} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{2}}{2^{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2^n} \quad (18)$$

Одержані числові ряди (1-18) відображають послідовності величин відрізків різних прямих ліній, розташованих у межах квадрата зі стороною $a = 1$. Як бачимо візуально на рис. 1 відрізки за різними комбінаціями складають різні геометричні фігури: різноманітні трикутники, квадрати, паралелограми, трапеції. Послідовності цих фігур і окремих їх параметрів являють собою геометричні інтерпретації певних числових рядів. Що може бути предметом подальших досліджень і створенням задач для практичного застосування у школах і на фізико-математичних факультетах? Одними з таких задач посильних не тільки для студентів, але і для школярів можуть бути дослідження швидкості збігання частинних сум S_n до значення суми ряду S в залежності від зростання «n». Не менш важливою може бути задача дослідження значень S_n і для випадку розбіжного ряду, тобто коли $\lim_{n\to\infty} S_n = \infty$.

Одержані ряди (1-18) пов'язані з геометричною прогресією зі знаменником $q = \frac{1}{2}$, тому вони є збіжними. Базовим для даних рядів є ряд (1), для якого сума S

обчислюється за відомою формулою: $S = \lim_{n\to\infty} \frac{a(1-q^n)}{1-q}$. Тому відповідно до ряду (1) одержуємо:

$$S = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{2}(1-\frac{1}{2^n})}{1-\frac{1}{2}} = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2^n}\right) = 1$$

Аналогічно обчислюються суми інших рядів:

(4): $S=\sqrt{2}$; (5): $S=\frac{3\sqrt{2}}{4}$; (6): $S=\frac{\sqrt{5}}{2}$; (7): $S=\frac{\sqrt{6}}{3}$; (8): $S=\frac{\sqrt{2}}{2}$; (9): $S=\frac{\sqrt{2}}{2}$; (10): $S=\sqrt{2}$; (11): $S=\frac{\sqrt{5}}{2}$; (12): $S=\sqrt{2}$; (13): $S=\frac{\sqrt{5}}{5}$; (14): $S=\frac{\sqrt{2}}{4}$; (15): $S=\frac{\sqrt{5}}{10}$; (16): $S=\frac{2\sqrt{5}}{5}$; (17): $S=\frac{\sqrt{2}}{2}$; (18): $S=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Значення сум окремих рядів можна візуально спостерігати на рис. 1. Наприклад, сума ряду (4) – $\sum_{n=1}^{\infty}|\overline{N_nN_{n+1}}| = |\overline{ON_1}| = \sqrt{2}$ і т. д. Також можна спостерігати, що ряди (4), (10) і (12) збігаються до однакових сум $S=\sqrt{2}$. Аналогічно ряди (9), (17), (18) мають однакові суми.

Розглянемо швидкість зростання частинних сум S_n для рядів (1), (4), (6), (7), (14), (15) до сум S цих рядів. Результати обчислень частинних сум S_2, S_4, S_8, S_{16} і значення відхилень величин S_n від S ($\Delta_2 = S - S_2$ і $\Delta_8 = S - S_8'$) представлені в таблиці 1.

Таблиця 1

Ряд	Сума S	S_n				$\Delta_n = S - S_n$
		$n=2$	$n=4$	$n=8$	$n=16$	
(1)	1	0,75	0,937500	0,996093	0,999985	Δ_2=0,25 Δ_8=0,003907
(4)	$\sqrt{2}$	1,060660	1,325825	1,408688	1,414192	Δ_2=0,353553 Δ_8=0,005525
(6)	$\frac{\sqrt{5}}{2}$	0,838525	1,048159	1,113666	1,118017	Δ_2=0,279508 Δ_8=0,004368
(7)	$\frac{\sqrt{6}}{3}$	0,612372	0,765466	0,813306	0,816484	Δ_2=0,204125 Δ_8=0,003190
(14)	$\frac{\sqrt{2}}{4}$	0,265165	0,331456	0,352172	0,353548	Δ_2=0,088388 Δ_8=0,001381

(15)	$\frac{\sqrt{5}}{10}$	0,167705	0,209633	0,222733	0,223603	Δ_2=0,055902 Δ_8=0,000874

Як бачимо з таблиці досить висока точність обчислення сум досліджуваних рядів досягається при кількості членів ряду $n = 8$ і відхилення від точного значення сум S спостерігається у третьому знаку після коми. Це по-перше, по-друге, чим менша сума ряду, тим швидше її значення досягається за кількістю членів ряду.

Висновки:

1. Запропонований алгоритм генерації числових рядів з використанням квадрата зі стороною $a = 1$, розташованого в системі координат OXY дозволяє створювати числові ряди з можливістю візуалізації членів ряду.

2. Одержані ряди з лінійною інтерпретацією їх членів можна використовувати при вивченні розділу «Ряди» студентам спеціальностей фізико-математичних факультетів педагогічних університетів.

3. Продемонстрована можливість використання різних способів генерації одного й того ж числового ряду може бути дидактичною підставою вивчення числових рядів з елементами дослідницької наукової роботи студентів.

4. Враховуючи, що ряди з лінійною геометричною інтерпретацією одержуються за допомогою відомих для учнів школи формул, можна рекомендувати використання квадрата зі стороною $a = 1$, вписаного в систему координат OXY для самостійної роботи учнів. Можна використовувати розглянутий алгоритм одержання числових рядів для створення олімпіадних задач як для студентів фізико-математичного факультету, так і для учнів старших класів. Членами студентської проблемної науково-дослідницької групи «Геометрична інтерпретація рядів» кафедри математики та методики її навчання КДПУ така робота проводиться останні 5 років. За результатами цієї роботи створені збірники задач по генерації числових рядів і дослідженню частинних сум S_n і сум S.

Список використаної літератури

1. Габ С. С. Числові ряди, які пов'язані з парадоксом Шварца / С. С. Габ // Актуальні аспекти фундаменталізації математичної підготовки в сучасних вищих навчальних закладах. Погляд студентів та молодих вчених: Всеукр. науко-практична конф. здобувачів вищої освіти та молодих вчених (Харків, 12-13 квітня 2018 р.): матер. доповідей та виступів.– Харків, 2018.– С. 114–117

2. Габ С. С. Геометрическая интерпретация числовых рядов, связанных с фракталами / С. С. Габ // Материалы XIV Международной научно-практической конференции молодых исследователей «Содружество наук. Барановичи – 2018» (Барановичи, 17 мая 2018 г.) – Барановичи, 2018 – С. 50–51

3. Габ С. С. Геометрична інтерпретація рядів: Кваліфікаційна робота ступеня вищої освіти магістр, спеціальності 014.04 Середня освіта (Математика) / С. С. Габ: наук. керівник В. В. Корольський. – Кривий Ріг, 2018. – 100 с.

4. Комарова А. А. Побудова і дослідження числових рядів, пов'язаних з елементами квадрата «танграм». Кваліфікаційна робота ступеня вищої освіти магістр, спеціальності 014.04 Середня освіта (Математика) / А. А. Комарова: наук. керівник В. В. Корольський. – Кривий Ріг, 2018. – 100 с.

5. Корольський В. В. Геометрична інтерпретація числових рядів / В. В. Корольський // Новітні комп'ютерні технології: наук.-метод. зб. / редкол.: С. О. Семеріков [та ін.] – Кривий Ріг, 2017. – том XV. – С. 57–63.

6. Корольський В. В. Геометрична інтерпретація числового ряду арифметичної прогресії / В. В. Корольський // Новітні комп'ютерні технології: наук.-метод. зб. / редкол.: С. О. Семеріков [та ін.] – Кривий Ріг, 2018. – том XVI. – С. 59–66.

7. Корольський В. В. Числові ряди, які пов'язані з параметрами додекаедра / В. В. Корольський. С. С. Габ // Вісник міжнародного дослідницького центру «Людина: мова, культура, пізнання»: Науковий журнал / за ред. В. В. Корольського. – Кривий Ріг, 2018. – том 42 – С.39–45.

8. Няньчук В. В. Генерація числових рядів за допомогою функції $y = \frac{1}{2^{n-1}}x$ і квадрата зі стороною $a = 1$: кваліфікаційна робота ступеня вищої освіти магістр, спеціальності 014.04 Середня освіта (Математика) / В. В. Няньчук: наук. керівник В. В. Корольський. – Кривий Ріг, 2021. – 97 с.

9. Примакова О. Ю. Генерація числових рядів за допомогою функції $y = \frac{1}{n}x$ і квадрата зі стороною $a = 1$: кваліфікаційна робота ступеня вищої освіти магістр, спеціальності 014.04 Середня освіта (Математика) / О. Ю. Примакова: наук. керівник В. В. Корольський. – Кривий Ріг, 2021. – 84 с.

10. Романова А. М. Генерація числових рядів та дослідження їх на збіжність: кваліфікаційна робота ступеня вищої освіти магістр, спеціальності 014.04 Середня освіта (Математика) / А. М. Романова: наук. керівник В. В. Корольський. – Кривий Ріг, 2019. – 90 с.

11. Христюк А. М. Зв'язок рядів арифметичної прогресії та гармонічних рядів / В. Д. Бобирь, А. М. Христюк // Матеріали міжнародної науково-методичної конференції «Проблеми математичної освіти» (ПМО – 2019 р.), м. Черкаси, 11-12 квітня 2019. – Черкаси: Вид. ФОП Гордієнко Е. І. 2019. – 280 с.

12. Христюк А. М. Реалізація дидактичного принципу наочності при вивченні числових рядів / В. О. Бобирь, А. М. Христюк // X Міжнародна конференція молодих вчених «Молоді вчені 2019 – від теорії до практики» м. Дніпро, 7 березня 2019 – Дніпро, 2019. – 464 с.