УДК: 374.951

ВИКОРИСТАННЯ ТЕХНОЛОГІЇ УДО ПРИ СКЛАДАННІ ЗАДАЧ ІЗ МОДУЛЕМ

Ярослав Левицький

Науковий керівник: доктор іст. наук, професор Ріжняк Р.Я.

Центральноукраїнський державний педагогічний університет імені Володимира Винниченка, м. Кропивницький, Україна

У статті розкривається послідовність розгляду питань, на яких базується складання рівнянь і нерівностей із модулем, а також будь-яких інших завдань, де присутній модуль. Наведено приклади задач із модулем та їх складання. Розв'язано задачу на побудову графіка функції, де присутній модуль. Розкрито узагальнений спосіб розв'язування будь-якого завдання із модулем, а також наведено переваги цього способу розв'язання й недоліки. Висвітлено, що технології укрупнення дидактичних одиниць є корисними не тільки для вчителя, а й для учня.

Ключові слова: *рівняння, корінь рівняння, складання задачі із модулем, невідома, розв'язання рівняння, модуль, рівняння з модулем, нерівність, технології УДО.*

USE OF UDO TECHNOLOGY IN MAKING PARAMETER TASKS WITH THE MODULE

Y. Levickiy

Scientific supervisor: doctor of historical sciences, professor Rizhniak R. Ya.

The Volodymyr Vynnychenko Central Ukrainian State Pedagogical University, Kropyvnytsky, Ukraine

The article reveals the sequence of consideration of the questions on which the composition of equations and inequalities with the module is based, as well as any other tasks where the module is present. Examples of problems with the module and their composition are given. The task of plotting a graph of the function where the module is present has been solved. A generalized method of solving any problem with *a module is disclosed and the advantages and disadvantages of this solution method are also given.*

Key words: *equation, root of the equation, compiling a problem with a module, unknown, solving of the equation, module, inequality, UDO technology.*

Постановка проблеми. Для дослідження даної проблеми, а саме проблеми формування інтегративних математичних здібностей учнів з використанням технології УДО (укрупнення дидактичних одиниць), був обраний матеріал шкільного курсу математики, а саме задачі X-го класу, де можна зустріти модуль. На прикладі цих завдань буде проілюстровано застосування технології укрупнення дидактичних одиниць, а саме: метод протиставлення (вивчення взаємно-обернених операцій та дій), аналіз та синтез, використання деформованих вправ, узагальнення та аналогію, повну матрицю задач, складання задач. Рівняння та нерівності з модулем є логічним продовженням рівнянь і нерівностей, які вивчалися в школі раніше (лінійні, квадратні тощо). Втім, кожна задача з модулем завжди має графічну інтерпретацію. У даній статті ми спробуємо складати задачі з модулем, виходячи з графічного й аналітичного способу розв’язання. Задача з модулем була обрана недаремно, тому що саме від арифметичної операції й буде залежати та геометрична інтерпретація, про яку ми сказали вище. У складанні завдань нам допоможе графічний калькулятор DESMOS, який активно використовується вченими при дослідження різних математичних проблем і сьогодні. Варто відмітити, що реалізація інтегративного підходу здійснюється в тому числі через технології УДО. Обсяг використання технології укрупнення дидактичних одиниць залежить від мети, яку ставить перед класом учнів вчитель. Результат – формування в учнів інтегративного образу, а сама ж технологія УДО забезпечить процес об’єднання компонентів інтегративного образу за їх істотними ознаками.

УДК: 374.951

Аналіз досліджень і публікацій. До цієї проблеми зверталися В.А. Кушнір і Р.Я. Ріжняк в [1; 2; 5; 7], де автори досліджували проблеми використання обраного способу для розв'язування різних математичних задач з метою організації інтегративної навчальної діяльності учнів. Інтегративний підхід у навчанні дає можливість розглядати зміст навчання окремої дисципліни саме у процесі взаємодії з іншими навчальними дисциплінами, співставляти закономірності та закони навчальної дисципліни, яка вивчається, із закономірностями та законами природи. Так, наприклад, у задачі «Знайти значення $\boldsymbol{sin\,18}^{\circ}$», автори проілюстрували, що дана задача породжує серію задач на знаходження синусів, косинусів, тангенсів чи котангенсів різних гострих кутів. Кінцевий результат формування інтегрованого образу способу розв'язування залежать від мети, поставленої вчителем чи викладачем. При формуванні інтегрованого образу наперед обраного способу розв'язання серії задач вчитель організовує процес мисленого об'єднання компонентів інтегрованого образу за їх істотними ознаками. Дослідження, проведене у статтях В.А. Кушніра і Р.Я. Ріжняка підтверджує доцільність використання наперед обраного способу розв'язання серії задач з метою формування стійкого інтегрованого образу. Частково до цієї проблематики звертався й автор статті [3; 4]. Підручники профільного рівня X-го класу з алгебри (а також рівень стандарту) містять різні задачі з модулем, частину яких ми використовували у свій практичній діяльності (розкрити модуль, розв'язати рівняння, розв'язати нерівність, побудувати графік функції тощо). До цієї проблеми звертався автор цієї статті у своїй праці [6], де він дослідив різні інтегровані образи, які виникають при організації розв'язування рівнянь та нерівностей з параметром. Автор показав, що, як правило, таке подання матеріалу забезпечує повне розуміння того, як працює параметр. Він розглянув обидва варіанти розв'язання рівняння з параметром (аналітичний і графічний способи). Проведене автором дослідження дало підстави підтвердити доцільність використання різних способів розв'язування рівнянь та нерівностей з параметром, метою яких було формування стійкого інтегрованого образу. На основі цього є доречним давати схожі (типові завдання). Як результат – формування в учнів здатностей до інтегрованої математичної доцільності. У згаданій роботі автор обрав рівняння з модулем, де розв'язав це рівняння залежно від значень параметра $\boldsymbol{a}$.

Укрупнення дидактичних одиниць, як технологія, розроблена математиками П.М. Ерднієвим та Б.П. Ерднієвим. Автори зазначали, що саме УДО надають отриманому знанню ґрунтовності, цілісності і стійкості в часі. УДО – технологія навчання, яка забезпечує результативність процесу навчання завдяки активізації в учнів підсвідомих механізмів переробки інформації. За словами авторів УДО вбирає в себе такі взаємопов'язані підходи про навчання: «1) сумісне та одночасне вивчення взаємопов'язаних дій, операцій, функцій, теорем; 2) забезпечення цілісності процесів створення та розв'язування задач; 3) розгляд у взаємоперетвореннях визначених та невизначених завдань (деформованих вправ); 4) перетворення структури вправи для протиставлення вихідного та перетвореного завдання; 5) досягнення системності знань; 6) реалізація принципу доповнюваності в системі вправ» [8, с. 7; 9]. Основною ланкою процесу навчання математики автори вважають математичну вправу, а основною формою вправи – багатокомпонентне завдання, що утворюється з декількох логічно розподілених, але психологічно поєднаних в одне ціле частин: розв'язування вихідної задачі, складання оберненої задачі та її розв'язування, складання аналогічної задачі за даним виразом або рівнянням та її розв'язання, складання задачі, що є узагальненою за деякими параметрами вихідної задачі. Технологія УДО – одна з основ реалізації інтегративного підходу до навчання.

Метою статті є дослідження підходів до розгляду питання «Складання задач із модулем» та демонстрація застосування складових технології УДО при формуванні у старшокласників математичних інтегративних здібностей.

УДК: 374.951

Показати перевагу узагальненого способу розв’язування будь-якого завдання із модулем.

Виклад основного матеріалу. Визначимо коло задачного матеріалу, який буде використаний при дослідженні, а саме, почнемо з графіка функції.

Задача 1.

Побудуйте графік функції:

$$f(x) = |x + 3| + |x + 1|$$

Розглянемо узагальнений спосіб розв’язування задач із модулем (його можна використовувати тоді і тільки тоді, коли суб’єкт навчання розуміється на поняттях: і – «система»; або – «сукупність»).

Знайдемо нулі виразів під знаком модуля: $\begin{matrix} x+3=0 \\ x+1=0 \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} x=-3 \\ x=-1 \end{matrix}$, нанесемо ці значення на числову пряму і розглянемо проміжки, які утворилися, при цьому необхідно визначити знак кожного з наших виразів під знаком модуля на кожному проміжку:

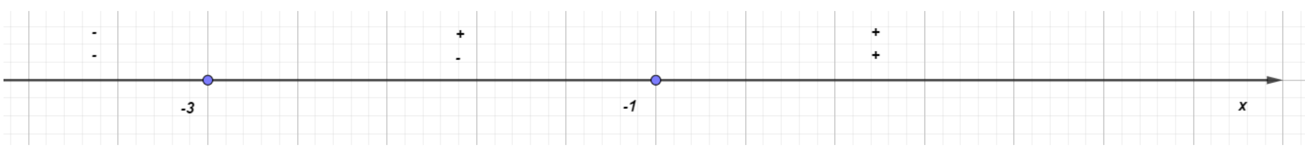

Рис. 1

Розглянемо властивості функції на кожному із проміжків: А) $x \in (-\infty; -3]$; Б) $x \in (-3; -1]$; В) $x \in (-1; +\infty)$.

А) На проміжку $x \in (-\infty; -3]$ маємо такий графік функції: $y_{(-\infty;-3]} = -(x + 3) - (x + 1) = -x - 3 - x - 1 = -2x - 4$

Б) На проміжку $x \in (-3; -1]$ маємо такий графік функції: $y_{(-3;-1]} = +(x + 3) - (x + 1) = x + 3 - x - 1 = 2$

В) На проміжку $x \in (-1; +\infty)$ маємо такий графік функції: $y_{(-1;+\infty)} = +(x + 3) + (x + 1) = x + 3 + x + 1 = 2x + 4$

В загальному випадку маємо такий графік функції:

$$y = \begin{cases} -2x - 4; \;\; x \in (-\infty; -3] \\ 2; \; x \in (-3; -1] \\ 2x + 4; \; x \in (-1; +\infty) \end{cases}$$

Побудуємо даний графік. Будуємо графік функції $y = -2x - 4$ на проміжку $(-\infty; -3]$. Далі побудуємо графік функції $y = 2$ – це пряма, паралельна осі абсцис, цей графік будуємо на проміжку $(-3; -1]$. Далі будуємо графік функції $y = 2x + 4$ на проміжку $x \in (-1; +\infty)$. Загальний графік функції зображений на рис. 2.

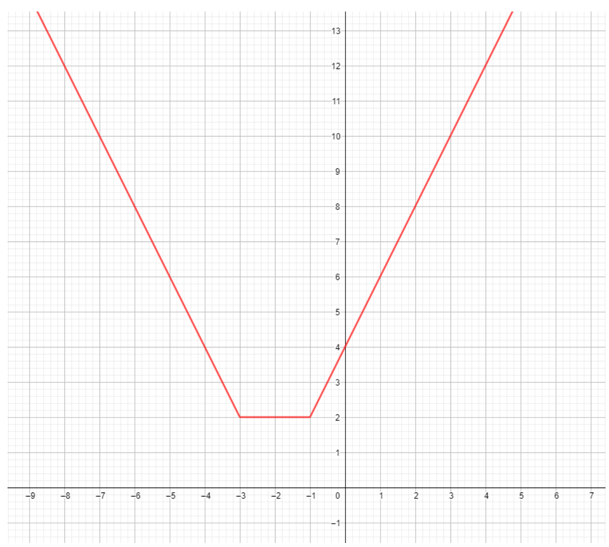

Рис. 2

Фактично, на рисунку 2 зображена геометрична інтерпретація задачі 1. Запам’ятаймо її, щоб порівняти цю інтерпретацію з наступним завданням. Змінимо в задачі 1 арифметичну операцію додавання на віднімання, отримаємо задачу 2.

Задача 2

Побудуйте графік функції:

$$g(x) = |x + 3| - |x + 1|$$

Задачу 2 розв’язуємо аналогічно до задачі 1 – отримаємо таку геометричну інтерпретацію:

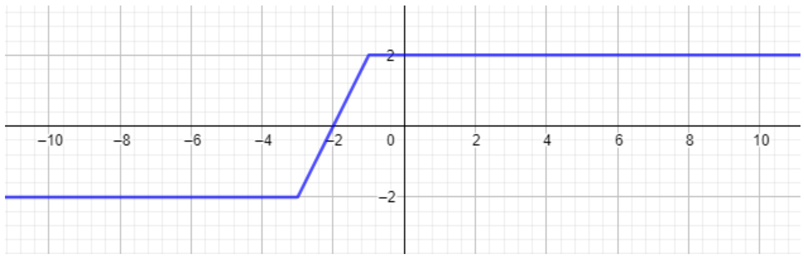

Рис. 3

Досить важливо акцентувати увагу учнів на тому, як змінився графік функції, якщо замінити між модулями дію. Продовжимо далі, поставимо між двома модулями дію множення, маємо задачу 3.

Задача 3

Побудуйте графік функції:

$$h(x) = |x + 3| \cdot |x + 1|$$

Отримаємо таку геометричну інтерпретацію:

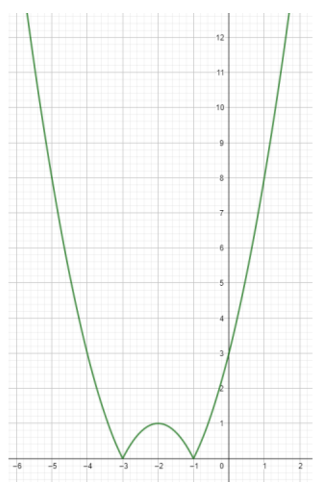

Рис. 4

На рисунку 4 можна побачити вже параболи (рисунки 2 і 3 – прямі). Тобто, замінюючи дії між модулями ми кожного разу маємо різні графіки (різні геометричні інтерпретації). Задачі 1, 2 та 3 можна ускладнювати, якщо вводити третій модуль (четвертий і т.д). Проте для задачі 3 достатньо двох множників (не всякі кубічні параболи можна побудувати без дослідження функції). Головне обмеження на усі задачі – дослідження функції за допомогою похідної. Після вивчення похідної можна додавати модулів скільки завгодно, від цього збільшиться об'єм розв'язання завдання (а також його складність). Після того, як учні засвоїли алгоритм роботи із модулями, можна запропонувати наступну серію, завдань, а саме розв'язати рівняння:

$$1.1.\, f(x)=\pi$$

$$1.2.\, g(x)=e$$

$$1.3.\, h(x)=\pi$$

$$1.4.\, p(x)=e$$

Задачі 1.1–1.4 ускладнені ірраціональними числами. Дуже корисно для учнів виконати перевірку до кожного з рівнянь (одночасно тренуються й навички роботи з числами). У даних прикладах чітко прослідковується логіка технології УДО. Логіку складань задач із модулем можна продовжувати, відштовхуючись від основної задачі, розв'язавши її з використанням означення модуля. Пропонуємо розв'язати серію нерівностей:

$$2.1.\, f(x)>0;\ 2.2.\, f(x)<0; 2.3.\, f(x)\geq 0;\ 2.4.\, f(x)\leq 0;$$

$$2.5.\, (x)>0;\ 2.6.\, g(x)<0; 2.7.\, g(x)\geq 0;\ 2.8.\, g(x)\leq 0;$$

$$2.9.\, h(x)>0; 2.10.\, h(x)<0; 2.11.\, h(x)\geq 0; 2.12.\, h(x)\leq 0;$$

$$2.13.\, p\ (x)>0;\ 2.14.\, p(x)<0; 2.15\ p(x)\geq 0;\ 2.16.\, p(x)\leq 0;$$

Примітка. Кожне завдання статті автор склав самостійно й розв'язав у власному підручнику: «Методика розв'язання завдань із шкільного курсу Математики (ШКМ)» ІІ частина, 2022 рік, у стадії підготовки до видання).

Ми укрупнили дидактичну одиницю, прийшовши до серії нерівностей. Продовжимо укрупнювати дидактичну одиницю далі – прийдемо до таких завдань:

Розв'яжіть рівняння: 3.1. $f(x) = g(x)$;

Розв'яжіть нерівність: 3.2. $g(x) \leq h(x)$;

Задачі 3.1 і 3.2 є найскладнішими варіантами для учнів. Перед їх розв'язанням необхідно, щоб учні міцно засвоїли застосування означення модуля, оскільки це є основне при розв'язуванні подібних задач. Зрозуміло, що кожну задачу можна ускладнювати далі – скласти для учня індивідуальну задачу, яка допоможе йому зрозуміти алгоритм краще (і таких задач ми можемо складати безліч, що є добре для вчителя). Але це вимагає попередньої підготовки перед уроком.

Висновки. Проведене дослідження дає підстави вважати, що технології укрупнення дидактичних одиниць є корисними не тільки для вчителя, а й для учня. Вчитель на основі основного завдання пропонує учням різні задачі одного типу, веде спостереження за тим, хто як розв'язує і які труднощі у кого виникають. Пропонує комплекс різних вправ, які в кінцевому випадку допоможуть розв'язати складну задачу. При використанні таких прийомів учням легше навчитися розв'язувати такі завдання, вони починають впізнавати схожі задачі й розв'язувати їх за тими ж принципами, які засвоїлись. Це є результатом сформованості у учнів стійкого інтегративного образу. Слід зауважити, що технологія укрупнення дидактичних одиниць є ефективною, як з точки зору використання вчителем для організації навчальної роботи з учнями, так і з точки зору самостійної роботи учнів із теоретичним і задачним матеріалом. Будемо вважати, що учні добре засвоїли означення модуля, якщо вони розв'язують будь-яку задачу, де присутній модуль.

Література.

УДК: 374.951

1. Кушнір В., Ріжняк Р. Формування в учнів складних умінь використовувати моделювання у процесі розв'язування математичних задач інтегративного змісту // Математика в школі. – 2009. – № 5. – с. 13–17.
2. Кушнір В., Ріжняк Р. Розв'язування математичних задач інтегративного змісту засобами комп'ютерного моделювання // Математика в школі. – 2009. – № 10. – с. 34–39.
3. Левицький Я.В. Розв'язування рівнянь та нерівностей з параметром // Наукові записки молодих учених. – 2019. – № 3. – Електронний ресурс: https://phm.cuspu.edu.ua/ojs/index.php/SNYS/article/view/1622
4. Левицький Я.В. Складання задач з параметром з використанням графічного калькулятора DESMOS // Наукові записки молодих учених. – 2021. – № 8. – Електронний ресурс: https://phm.cuspu.edu.ua/ojs/index.php/SNYS/article/view/1902
5. Кушнір В., Кушнір Г., Ріжняк Р. Системне моделювання процесу розв'язування текстових математичних задач: кібернетичний підхід // Постметодика. – 2009. – № 4 (88). – с. 22-27.
6. Кушнір В. Системний аналіз педагогічного процесу: методологічний аспект. – Кіровоград: КДПУ, 2001. – 340с.
7. Кушнір В., Ріжняк Р. Формування в учнів умінь інтегративної діяльності з використанням наборів математичних задач, утворених задачною темою // Наукові записки КДПУ ім. В. Винниченка. – Випуск 90. – Серія: Педагогічні науки. – Кіровоград: РВВ КДПУ ім. В. Винниченка, 2010 – с. 156-161.
8. Эрдниев П. М., Эрдниев Б. П. Укрепление дидактических единиц в обучении математике: книга для учителя / П. М. Эрдниев, Б. П. Эрдниев. – Москва: Просвещение, 1986. – 255 с.
9. Эрдниев П.М. Укрупнение дидактических единиц как технология обучения, ч. 1. – Москва: Просвещение, 1992.

10. Ясінський В.В. Математика. Навчальний посібник для слухачів ФДП НТУУ «КПІ». За ред чл.-кор. НАН України В.С. Мельника. – К.: НТУУ «КПІ», 2005. – 372 с.