УДК 519.21

АПРОКСИМАЦІЯ ОДНІЄЇ ТРАНСЦЕНДЕНТНОЇ ФУНКЦІЇ РОЗПОДІЛУ МНОГОЧЛЕНАМИ ЛАГРАНЖА

Макарчук Олег, Самарець Анастасія

Центральноукраїнський державний педагогічний університет імені Володимира Винниченка, м. Кропивницький, Україна

Анотація. В статті представлено оцінки апроксимацій однієї абсолютно неперервної функції розподілу класичними інтерполяційними многочленами Лагранжа. Акцент здійснюється на випадок, коли відповідна функція розподілу не виражається в елементарних функціях тобто є трансцендентною функцією дійсної змінної. Аналіз відхилень інтерполяційних поліномів по відношенню до функції розподілу здійснюється на основі класичної метрики Чебишева в просторі неперервних функцій дійсної змінної $C[0;1]$.

Ключові слова: функція розподілу, многочлен Лагранжа, метрика Чебишева, інтерполяційний поліном, відхилення, елементарна функція.

Approximation of one transendent function of distribution by lagrangian polymones

O Makarchuk, A Samarets

Volodymyr Vynnychenko Ukrainian State Pedagogical University, Kropyvnystky, Ukraine

Abstract. The paper presents estimates of approximations of one absolutely continuous distribution function by classical Lagrange interpolation polynomials. The emphasis is on the case when the corresponding distribution function is not expressed in elementary functions, ie is a transcendental function of a real variable. The analysis of deviations of interpolation polynomials with respect to the distribution function is carried out on the basis of the classical Chebyshev metric in the space of continuous functions of a real variable $C[0;1]$.

Keywords: distribution function, Lagrange polynomial, Chebyshev metric, interpolation polynomial, deviation, elementary function.

Постановка проблеми. Класичною задачею теорії наближень функцій дійсної змінної є проблема наближення функцій певним класом відомих функцій, або функцій, що маю хороші алгебраїчні властивості. Тобто розглядаються функції з хорошими диференціальними властивостями.

Одним з таких класів функцій, є клас звичайних або класичних поліномів, що мають вигляд:

$$h(x) = \sum_{j=1}^{n} a_j x^j.$$

Хоча абсолютно неперервні функції асоціюються з функціями з хорошими диференціальними властивостями, однак серед них міститься клас функції, які не виражаються через елементарні функції. Яскравим прикладом такої абсолютно неперервної функції розподілу є функція стандартного нормального розподілу, яка має щільність

$$p_{\varphi}(t) = \frac{e^{-\frac{t^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}$$

та відповідно функцію розподілу, так звану функцію німецького математика Карла Фрідріха Гаусса:

$$F_{\varphi}(z) = \int_{-\infty}^{z} p_{\varphi}(x)dx = \int_{-\infty}^{z} \frac{e^{-\frac{t^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}dt.$$

У відповідній роботі здійснюється акцент на розгляд класичної поліноміальної схеми породженої многочленами Лагранжа.

Об'єкт дослідження: абсолютно неперервні функції розподілу.

Предмет дослідження: апроксимаційні характеристики многочленів Лагранжа.

Мета дослідження: дослідити апроксимаційні характеристики многочленів Лагранжа по відношенню до абсолютно неперервних функцій розподілу.

Результати дослідження є актуальними та можуть бути використані при викладанні спец курсу з теорії ймовірностей та теорії наближень функцій дійсної змінної.

Оцінка апроксимацій функції розподілу поліномами Лагранжа.

Таким чином, розглянемо абсолютно неперервну випадкову величину задану наступною щільністю розподілу:

$$p_{\tau}(x) = \begin{cases} Ce^{-x^2}, x \in [0;1] \\ 0, x \notin [0;1] \end{cases}$$

У цьому випадку потрібно знайти сталу так щоб, виконувалась нормуюча властивість.

Маємо:

$$1 = \int_0^1 p_\tau(x)dx = C\int_0^1 e^{-x^2}dx$$

звідки, отримаємо:

$$C = \frac{1}{\int_0^1 e^{-x^2}dx}$$

Обрахуємо відповідний інтеграл використовуючи сервіс wolframalpha. Зазначимо, що відповідний інтеграл не береться в елементарних функціях.

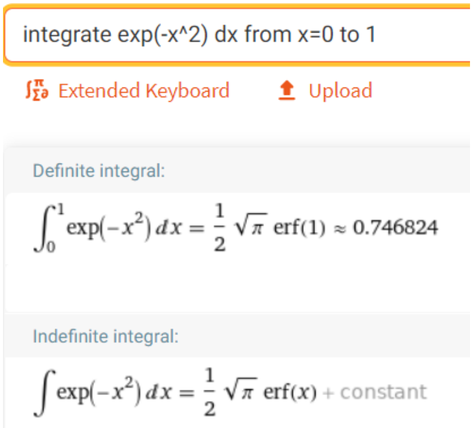

Рис 1. Обчислення $\int_0^1 e^{-x^2}dx$ в сервісі wolframalpha.

Таким чином, маємо:

$$p_\tau(x) = \begin{cases} 1.33e^{-x^2}, x \in [0;1] \\ 0, x \notin [0;1] \end{cases}$$

Побудуємо відповідний графік щільності, використовуючи команду

Piecewise[{{0, x<= 0},{1.33exp(-x^2), 0<x<=1}, {0, x>1}}]

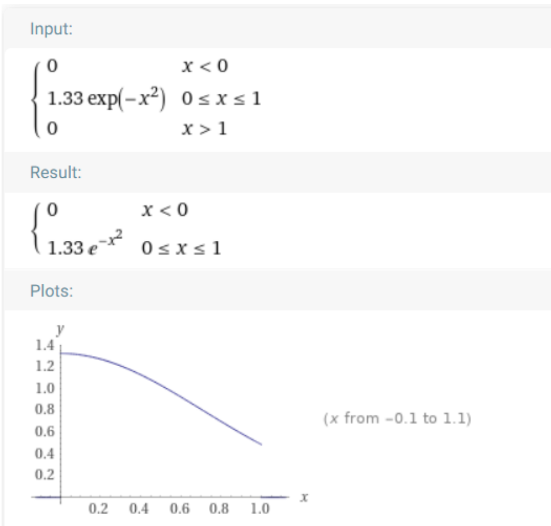

Рис 2. Графік щільності $p_\tau(x)$.

Таким чином, функція розподілу має вигляд:

$$F_\tau(x) = \begin{cases} 0, x \le 0 \\ 1.33 \int\limits_0^x e^{-t^2} dt\,, x \in [0; 1] \\ 1, x \ge 1 \end{cases}$$

Таким чином, маємо

$$\int\limits_0^x e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot \operatorname{erf}(x)$$

звідки

$$F_\tau(x) = \begin{cases} 0, x \le 0 \\ 1.19 \cdot \operatorname{erf}(x), x \in [0; 1] \\ 1, x \ge 1 \end{cases}$$

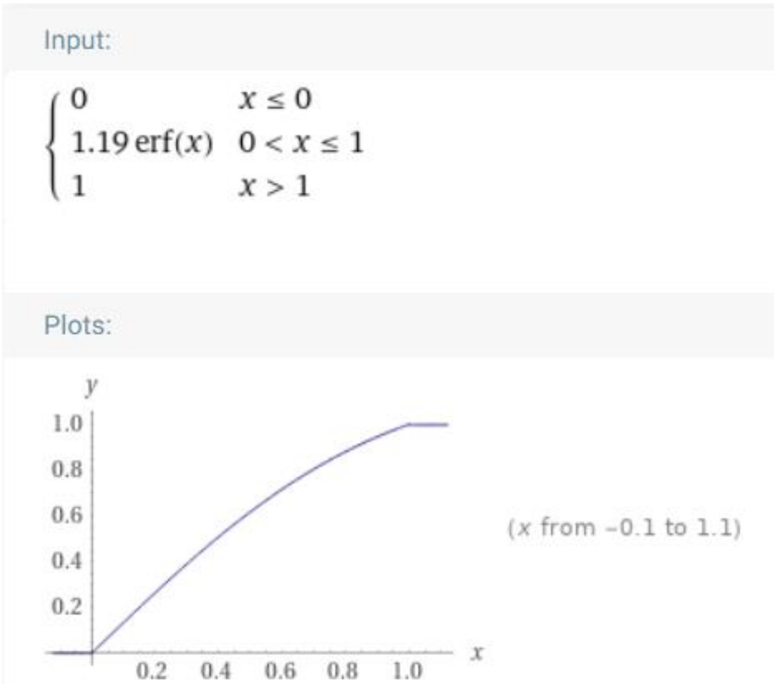

Рис 3. Графік $F_\tau(x)$.

Для прикладу розглянемо многочлен Лагранжа порядка 2. Знайдемо аналітичний вид цього многочлена двома способами. Перший полягає в явному знаходженні канонічної структури на основі системи рівнянь. Зрозуміло, що

$$F_\tau(0) = 0; \quad F_\tau(1) = 1; \quad F_\tau(0{,}5) = 0.62$$

Отже, нехай маємо:

$$f_2(x) = ax^2 + bx + c$$

Отримаємо, систему рівнянь:

$$\begin{cases} c = 0 \\ 0.25a + 0.5b + c = 0.62 \\ a + b + c = 1 \end{cases}$$

Після підстановки значення в друге та третє рівняння отримаємо:

$$\begin{cases} 0.25a + 0.5b = 0.62 \\ a + b = 1 \end{cases}$$

Розв’язуючи систему наприклад методом віднімання маємо:

$$\begin{cases} a = -0.48 \\ b = 1.48 \end{cases}$$

Таким чином маємо многочлен Лагранжа другого порядку:

$$f_2(x) = -0.48x^2 + 1.48x$$

Знайти многочлен Лагранжа також можливо і на основі сервісу wolframalpha. Для цього потрібно використати команду:

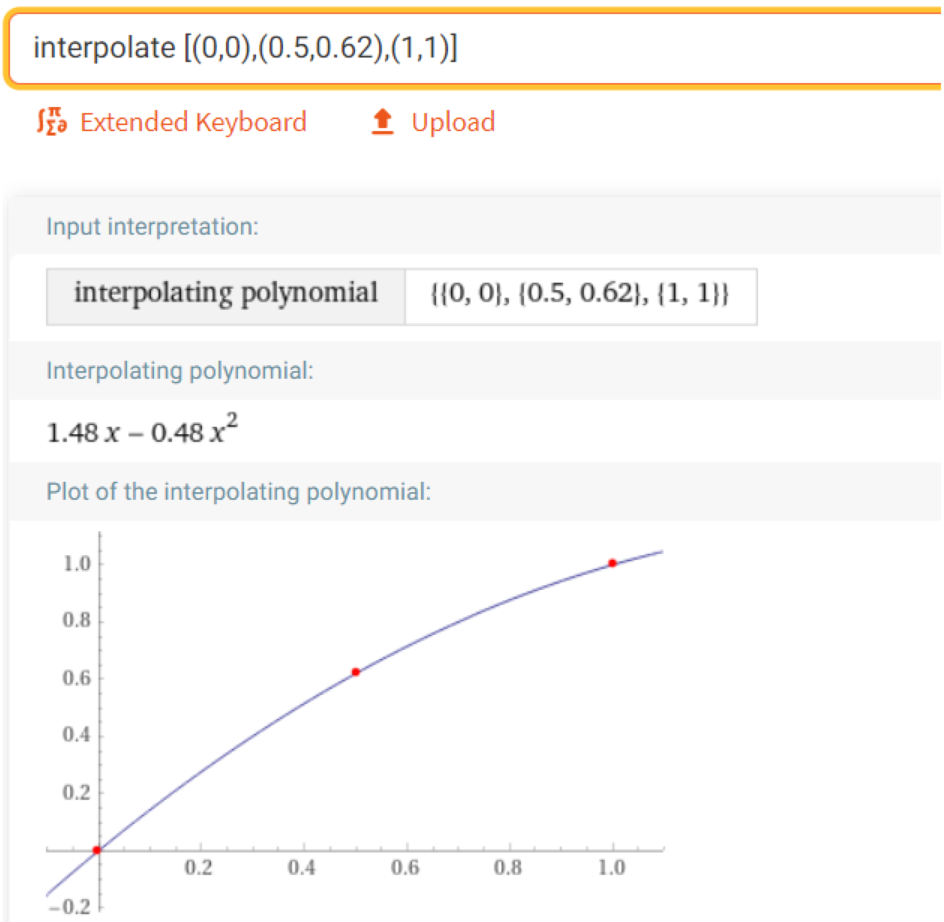

Рис 4. Знаходження інтерполяційного полінома Лагранжа в сервісі wolframalpha

В подальшому використаємо позначення многочлена Лагранжа порядку n у вигляді:

$$f_n(x) = c_n x^n + c_{n-1}x^{n-1} + \cdots + c_1 x + c_0$$

Для аналізу близькості наближення будемо використовувати величину:

$$\Delta_n^L = \max_{[0;1]} |f_n\,(t) - F_\tau(t)|$$

Зрозуміло, що в цьому випадку використовується класична метрика Чебишева:

$$\rho(f;g) = \max_{[0;1]} |f(x) - g(x)|$$

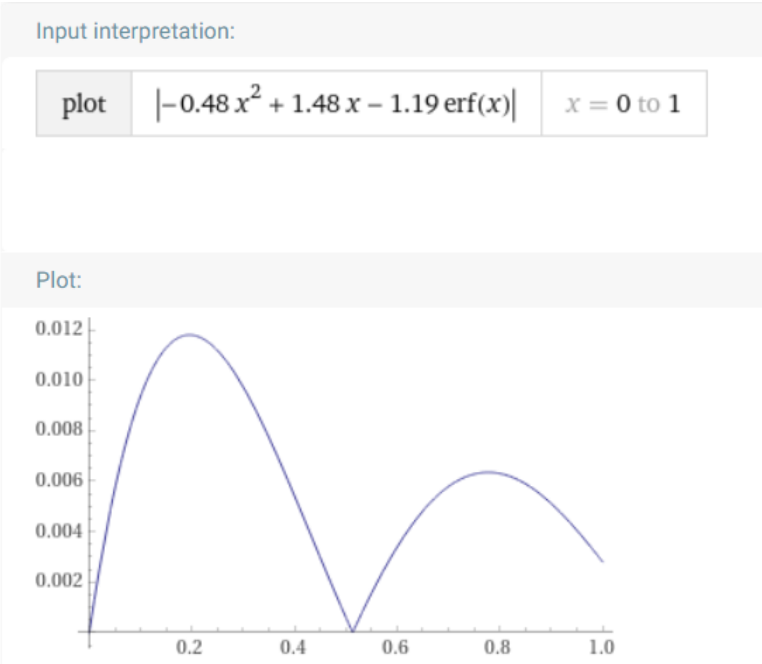

Рис 5. Графік функції $|f_2\,(t) - F_\tau(t)|$

Для точного знаходження відповідного максимума використаємо команду:

maximize |-0.48x^2+1.48x-1.19erf(x)| x from 0 to 1

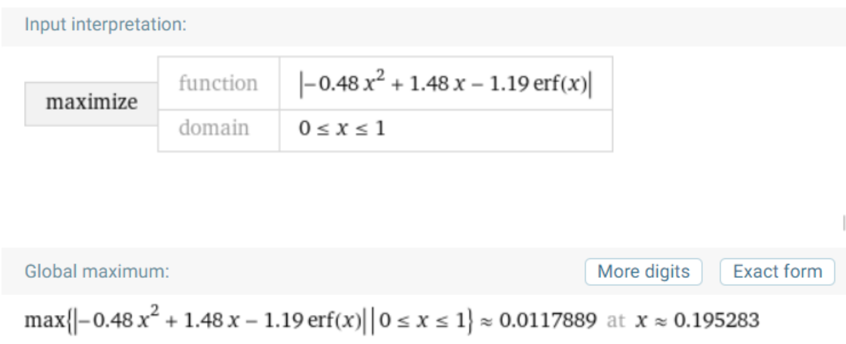

Рис 6. Знаходження Δ_2^L *в сервісі wolframalpha*

Аналогічну процедуру виконуємо і для інших значень n, а саме: $n = 2; 3; 4; 5; 6.$

Таблиця 1.

Величини відхилень $\Delta_n^L, (n = 2; 3; 4; 5; 6.)$.

$\boldsymbol{n}$	$\boldsymbol{\Delta_n^L}$
2	0,82
3	0,012
4	0,0061
5	0,0022
6	0,0009

Висновки. Аналізуючи відповідні результати обрахунків можливо зробити висновок: прослідковуються збіжність поліномів Лагранжа до відповідної абсолютно неперервної функцій розподілу. Асимптотика збіжності є доволі швидкою. Цілком природним питанням є дослідження інших апроксимаційних схем, зокрема які грунтуються на многочленах Бернштейна та Тейлора.

Список використаної літератури

1. Гельгор А.Л., Горлов А.И., Попов Е.А. Методы моделирования случайных величин и случайных процессов. − СПб.: Изд-во Политехнического университета, 2017. −217 с.

2. Донченко В.С., Сидоров М.В.-С., Шарапов М.М. Теорія ймовірностей та математична статистика. Київ: ВЦ «Академія», 2009. – 288 с.

3. Нестеренко О.Н. Елементи теорії наближень у задачах і прикладах. К.: Київський національний університет імені Тараса Шевченка, механіко-математичний факультет, 2013. — 153 с.

4. Примак А.В., Шевчук І.О. Теорія наближень. К.: Київський національний університет імені Т. Шевченка, 2011. − 174 с.

5. Турчин В.М. Теорія ймовірностей і математична статистика. Дніпропетровськ: ІМА-прес, 2014. −556 с.