УДК 372.851

ВИКОРИСТАННЯ ТЕХНОЛОГІЇ УДО ПРИ СКЛАДАННІ ЗАДАЧ З ПАРАМЕТРОМ

Левицький Ярослав

Науковий керівник: доктор іст. наук, професор Ріжняк Р.Я.

Центральноукраїнський державний педагогічний університет імені Володимира Винниченка, м. Кропивницький, Україна

У статті розкривається послідовність розгляду питань, на яких базується складання рівнянь і нерівностей з параметром. Наведено приклади задач з параметром та їх складання.

Ключові слова: *рівняння, корінь рівняння, складання задачі з параметром, невідома, розв'язання рівняння, параметр, рівняння з параметром, нерівність, технології УДО.*

Use of UDO technology in making tasks with the parameter

Y. Levickiy

Scientific supervisor: doctor of historical sciences, professor Rizhniak R. Ya.

The Volodymyr Vynnychenko Central Ukrainian State Pedagogical University, Kropyvnytsky, Ukraine

The article reveals the sequence of consideration of questions on which the compilation of equations and inequalities with the parameter is based. Examples of problems with a parameter and their addition are given.

Key words: *equation, root of the equation, compiling a problem with a parameter, unknown, solving of the equation, parameter, inequality, UDO technology.*

Постановка проблеми. Для дослідження даної проблеми, а саме проблеми формування інтегративних математичних здібностей учнів з використанням технології УДО (укрупнення дидактичних одиниць) був обраний матеріал шкільного курсу математики, який використовувався в творчій частині зовнішнього незалежного оцінювання – задача з параметром. На прикладі цього завдання буде проілюстровано застосування технології укрупнення дидактичних одиниць, а саме: метод протиставлення (вивчення взаємно-обернених операцій та дій), аналіз та синтез, використання деформованих вправ, узагальнення та аналогію, повну матрицю задач, складання задач. Більшість навчального матеріалу з математики поступово знаходить реалізацію у використанні навчальних математичних задачах інтегративного змісту, зазвичай це задачі творчого характеру, для розв’язування яких, учням слід застосувати уміння, які вони здобули при вивченні математики у школі, а також внаслідок самоосвіти. Розв’язувати такі задачі означає мати глибокі знання та винахідливість (уміти складати – найвищий рівень розуміння теми). Тому була обрана саме задача з параметром (рівняння). Варто відмітити, що реалізація інтегративного підходу здійснюється в тому числі через технології УДО. Обсяг технології укрупнення дидактичних одиниць залежить від мети, яку ставить перед класом учнів вчитель. Результат – формування в учнів інтегративного образу, а сама ж технологія УДО забезпечить процес об’єднання компонентів інтегративного образу за їх істотними ознаками.

Аналіз досліджень і публікацій. До цієї проблеми зверталися В.А. Кушнір і Р.Я. Ріжняк в [1; 2; 5; 7], де автори досліджували проблеми використання обраного способу для розв’язування різних математичних задач з метою організації інтегративної навчальної діяльності учнів. Інтегративний підхід у навчанні дає можливість розглядати зміст навчання окремої дисципліни саме у процесі взаємодії з іншими навчальними дисциплінами, співставляти закономірності та закони навчальної дисципліни, яка вивчається, із закономірностями та законами природи. Так, наприклад, у задачі «Знайти значення $\boldsymbol{sin\,18^{\circ}}$», автори проілюстрували, що дана задача породжує серію задач на знаходження синусів, косинусів, тангенсів чи котангенсів різних гострих кутів. Кінцевий результат формування інтегрованого образу способу розв’язування залежать від мети, поставленої вчителем чи викладачем. При формуванні інтегрованого образу наперед обраного способу розв’язання серії задач вчитель організовує процес мисленого об’єднання компонентів інтегрованого образу за їх істотними ознаками. Дослідження, проведене у статтях В.А. Кушніра і Р.Я. Ріжняка підтверджує доцільність використання наперед обраного способу розв’язання серії задач з метою формування стійкого інтегрованого образу. Частково до цієї проблематики звертався й автор статті [3; 4].

Укрупнення дидактичних одиниць, як технологія, розроблена математиками П.М. Ерднієвим та Б.П. Ерднієвим. Автори зазначали, що саме УДО надають отриманому знанню ґрунтовності, цілісності і стійкості в часі. УДО – технологія навчання, яка забезпечує результативність процесу навчання завдяки активізації в учнів підсвідомих механізмів переробки інформації. За словами авторів УДО вбирає в себе такі взаємопов'язані підходи про навчання: «1) сумісне та одночасне вивчення взаємопов'язаних дій, операцій, функцій, теорем; 2) забезпечення цілісності процесів створення та розв'язування задач; 3) розгляд у взаємоперетвореннях визначених та невизначених завдань (деформованих вправ); 4) перетворення структури вправи для протиставлення вихідного та перетвореного завдання; 5) досягнення системності знань; 6) реалізація принципу доповнюваності в системі вправ» [8, с. 7; 9]. Основною ланкою процесу навчання математики автори вважають математичну вправу, а основною формою вправи – багатокомпонентне завдання, що утворюється з декількох логічно розподілених, але психологічно поєднаних в одне ціле частин: розв'язування вихідної задачі, складання оберненої задачі та її розв'язування, складання аналогічної задачі за даним виразом або рівнянням та її розв'язання, складання задачі, що є узагальненою за деякими параметрами вихідної задачі. Технологія УДО – одна з основ реалізації інтегративного підходу до навчання.

Метою статті є дослідження підходів до розгляду питання «Складання задач з параметром» та демонстрація застосування складових технології УДО при формуванні у старшокласників математичних інтегративних здібностей.

Виклад основного матеріалу (результатів) дослідження. Після визначення інструментарію укрупнення дидактичних одиниць при дослідження проблеми, визначимо коло задачного матеріалу, який буде використаний при дослідженні. Як вже зазначалося, розглянемо проблему дослідження на прикладі завдання з параметром із пробного ЗНО 2021 року (оновлене): «*Задано рівняння:*

$$\frac{(x-2)\cdot(x^2-3(a-1)x+2a^2-3a)}{\log_{0,5}(3-2x)+2}=0 \qquad (1),$$

де x *– змінна,* a *– стала. 1. Запишіть множину допустимих значень змінної* x*. 2. Розв'яжіть задане рівняння залежно від значень* a».

Спробуємо скласти це завдання, для цього помітимо квадратний тричлен $x^2-3(a-1)x+2a^2-3a$ та прирівняємо його до нуля, створивши зведене квадратне рівняння з параметром:

$$x^2-3(a-1)x+2a^2-3a=0 \qquad (2)$$

Це рівняння просто й швидко можна розв'язати через дискримінант. Часто в таких квадратних рівнянь з параметром у ЗНО має в дискримінанті виділятися повний квадрат.

Зрозуміло, що рівняння (2) має два такі корені: $\left[\begin{array}{c} x_1=2a-3 \\ x_2=a \end{array}\right.$. Це легко бачити з теореми Вієта:

$$\begin{cases} x_1\cdot x_2=(2a-3)\cdot a=2a^2-3a \\ x_1+x_2=3a-3=3(a-1) \end{cases}$$

Примітка. Слід перевірити, чи дійсно в дискримінанті виділяється повний квадрат. Задача ускладнена була б саме з «не гарними» числами. Перевірку слід виконувати, адже це є обернена задача (є корені – скласти рівняння), такі завдання є однією з особливостей системи укрупнення дидактичних одиниць. Аналіз самої умови такого завдання дозволяє учням осмислювати зв'язки в задачах, визначати межі числа, яке можна підставити в задачу, щоб отримати правильну відповідь або ж здійснити певну аргументацію вибору розв'язання.

Ускладнимо задачу. Маємо дріб, де у чисельнику – квадратний тричлен, а у знаменнику – функція. Це робимо для того, щоб накласти умову, при якому значенні параметра a значення змінної x буде задовольняти область визначення тої функції. Розробники цього завдання обрали $\log_{0,5}(3-2x)+2$ – таку функцію, де учаснику ЗНО необхідно було знайти область визначення цієї функції, а потім використати цю область визначення для коренів рівняння $x^2 - 3(a-1)x + 2a^2 - 3a = 0$. Тобто корені повинні належати множині області визначення логарифмічної функції. Полегшити хід розв'язання можна було б, якщо замість $\log_{0,5}(3-2x) + 2$ взяти просто $x + 2$, звідки $x \neq -2$ і далі використовувати цей факт при розв'язанні. Масив роботи значно б зменшився. Також можна помітити множник $x - 2$ перед квадратним тричленом у чисельнику дробу рівняння (1). Оскільки коренями рівняння (1) є ретельно підібрані числа, то на основі розв'язаного рівняння учнями в класі, їм корисно запропонувати виконати серію нерівностей з параметром, а саме:

$$\frac{(x-2)\cdot(x^2-3(a-1)x+2a^2-3a)}{\log_{0,5}(3-2x)+2} > 0 \qquad (1.1)$$

$$\frac{(x-2)\cdot(x^2-3(a-1)x+2a^2-3a)}{\log_{0,5}(3-2x)+2} < 0 \qquad (1.2)$$

$$\frac{(x-2)\cdot(x^2-3(a-1)x+2a^2-3a)}{\log_{0,5}(3-2x)+2} \geq 0 \qquad (1.3)$$

$$\frac{(x-2)\cdot(x^2-3(a-1)x+2a^2-3a)}{\log_{0,5}(3-2x)+2} \leq 0 \qquad (1.4)$$

Логіку складання задач з параметром можна продовжувати, ускладнюючи або ж полегшуючи завдання. Спробуємо ускладнити це завдання, скласти подібне завдання, відштовхуючись від основної задачі – рівняння (2). Ускладнимо задачу (1) так:

$$\frac{(x-a)\cdot(x^2-3(a-1)x+2a^2-3a)}{\log_{0,5}(3-2x)+2} = 0 \qquad (3)$$

Опишемо видозміну рівняння (1): ми поставили у чисельнику множник $x - a$, корінь якого буде залежати від числа a (а не від конкретного числа $x = 2$, як це було у випадку (1)). Слід зауважити, що корінь має належати області допустимих значень, тобто $x_1 = a$ є $(-\infty; 1{,}5)$. Таким чином рівняння (3) може мати три, два, один або жодного коренів. Ускладнення рівняння відбулося в тому, що збільшилася кількість розв'язків, тим самим збільшилось поле можливостей дослідження цього рівняння, на задачу (3) слід витратити більше часу, ніж на задачу (1), де корінь $x_1 = 2$ був конкретним. Можливі цікаві випадки з рівнянням (3), а саме:

$$\frac{2ax(x^2-3(a-1)x+2a^2-3a)}{\log_{0,5}(3-2x)+2} = 0 \qquad (2.1)$$

$$\frac{|a|(x^2-3(a-1)x+2a^2-3a)}{\log_{0,5}(3-2x)+2} = 0 \qquad (2.2)$$

$$\frac{|x-a|(x^2-3(a-1)x+2a^2-3a)}{\log_{0,5}(3-2x)+2} = 0 \qquad (2.3)$$

$$\frac{|2ax|(x^2-3(a-1)x+2a^2-3a)}{\log_{0,5}(3-2x)+2} = 0 \qquad (2.4)$$

Якщо ж намагатися далі укрупнювати дидактичну одиницю, можна прийти до серії нерівностей або подальшого ускладнення завдання шляхом зміни логарифмічної функції в знаменнику дробу або ж включивши в цю функцію (у знаменнику) параметр – задача значно ускладниться. Наприклад, замість логарифмічної функції у знаменнику дробу задачі (3) можна поставити корінь:

$$\frac{(x-a)\cdot(x^2-3(a-1)x+2a^2-3a)}{\sqrt{3-2x}} = 0 \qquad (4)$$

Причому, область допустимих значень залишиться такою ж: $x \in (-\infty; 1,5)$. Це ОДЗ вчитель може змінювати власноруч, для того, щоб пропонувати учням завдання за варіантами, завдання одного типу, тренувати дітей на таких задачах, робити певні висновки й поступово ускладнювати його, з метою усвідомлення учнями роботи із задачами з параметром. Найскладнішим варіантом задачі для учнів буде той, коли у знаменнику поставити параметр, наприклад рівняння таке:

$$\frac{(x^2-3(a-1)x+2a^2-3a)}{\sqrt{a-2x}} = 0 \qquad (5)$$

Висновки та перспективи подальших пошуків у напрямі дослідження. Проведене дослідження дає підстави вважати, що технології укрупнення дидактичних одиниць є корисною не тільки для вчителя, а й для учня. Вчитель на основі основного завдання пропонує учням різні задачі одного типу, веде спостереження за тим, хто як розв'язує і які труднощі у кого виникають. Пропонує комплекс різних вправ, які в кінцевому випадку допоможуть розв'язати складну задачу. При використанні таких прийомів учням легше навчитися розв'язувати такі завдання, вони починають впізнавати схожі задачі й розв'язувати їх за тими ж принципами, які засвоїлись. Це є результатом сформованості у учнів стійкого інтегративного образу. Слід зауважити, що технологія укрупнення дидактичних одиниць є ефективною, як з точки зору використання вчителем для організації навчальної роботи з учнями, так і з точки зору самостійної роботи учнів із теоретичним і задачним матеріалом.

Список використаної літератури

1. Кушнір В., Ріжняк Р. Формування в учнів складних умінь використовувати моделювання у процесі розв'язування математичних задач інтегративного змісту // Математика в школі. – 2009. – № 5. – с. 13–17.
2. Кушнір В., Ріжняк Р. Розв'язування математичних задач інтегративного змісту засобами комп'ютерного моделювання // Математика в школі. – 2009. – № 10. – с. 34–39.
3. Левицький Я.В. Розв'язування рівнянь та нерівностей з параметром // Наукові записки молодих учених. – 2019. – № 3. – Електронний ресурс: https://phm.cuspu.edu.ua/ojs/index.php/SNYS/article/view/1622
4. Левицький Я.В. Складання задач з параметром з використанням графічного калькулятора DESMOS // Наукові записки молодих учених. – 2021. – № 8. – Електронний ресурс: https://phm.cuspu.edu.ua/ojs/index.php/SNYS/article/view/1902
5. Кушнір В., Кушнір Г., Ріжняк Р. Системне моделювання процесу розв'язування текстових математичних задач: кібернетичний підхід // Постметодика. – 2009. – № 4 (88). – с. 22-27.
6. Кушнір В. Системний аналіз педагогічного процесу: методологічний аспект. – Кіровоград: КДПУ, 2001. – 340с.
7. Кушнір В., Ріжняк Р. Формування в учнів умінь інтегративної діяльності з використанням наборів математичних задач, утворених задачною темою // Наукові

записки КДПУ ім. В. Винниченка. – Випуск 90. – Серія: Педагогічні науки. – Кіровоград: РВВ КДПУ ім. В. Винниченка, 2010 – с. 156-161.

8. Эрдниев П. М., Эрдниев Б. П. Укрепление дидактических единиц в обучении математике: книга для учителя / П. М. Эрдниев, Б. П. Эрдниев. – Москва: Просвещение, 1986. – 255 с.

9. Эрдниев П.М. Укрупнение дидактических единиц как технология обучения, ч. 1. – Москва: Просвещение, 1992.

10. Ясінський В.В. Математика. Навчальний посібник для слухачів ФДП НТУУ «КПІ». За ред чл.-кор. НАН України В.С. Мельника. – К.: НТУУ «КПІ», 2005.– 372 с.