УДК 372.851

ОРГАНІЗАЦІЯ НАВЧАЛЬНОЇ ДІЯЛЬНОСТІ УЧНІВ ПРИ ЗНАЙОМСТВІ З ПАРАМЕТРОМ

Чернецька Анастасія

Науковий керівник: канд. фіз.-мат. наук, доцент Ключник І.Г.

Центральноукраїнський державний педагогічний університет імені Володимира Винниченка, м. Кропивницький, Україна

У статті наведено основні методи та способи розв'язання рівнянь з параметром. При вивченні математики розглядаються задачі, для розв'язання яких потрібно не лише знання шкільної програми, а й творче застосування цих знань, зокрема, при розв'язуванні задач з параметром. Розв'язування таких задач сприяє інтелектуальному розвитку, розвитку логічного мислення та є гарним матеріалом для відпрацювання навичок. В роботі наведені приклади з детальним описом їх розв'язування, а також увага приділяється методичній стороні їх розв'язання.

Ключові слова: *параметр, лінійні рівння, нерівності, модуль,корені рівняння.*

Organization of students learning activities with acquaintance with parameter

A. Chernetska

Scientific supervisor: Candidate of Physical and Mathematical sciences, Docent Kliuchnyk I.G.

The Volodymyr Vynnychenko Central Ukrainian State Pedagogical University, Kropyvnytskyi, Ukraine

The article presents the main methods and ways of solving equations with a parameter. The study of mathematics considers problems that require not only knowledge of the school curriculum, but also the creative application of this knowledge, in particular when solving problems with a parameter. Solving such problems promotes intellectual development, the development of logical thinking and is a good material for developing skills. The paper provides examples with a detailed description of their solution, as well as attention will be paid to the methodological side of their solution.

Keywords*: parameter, linear equations, inequalities, modulus, roots of equation.*

Постановка проблеми. Сучасний стан розвитку шкільної освіти передбачає активне впровадження практичної складової математики як наріжного каменю формування успішної людини. Сьогодні на практиці ми все частіше стикаємося з тим, що учнів навчають робити все за заданим алгоритмом, не показуючи, що вся краса математики криється у творчості та креативному підході до розв’язування певних видів завдань. Саме до таких і відносяться рівняння та нерівності з параметрами. У завданнях з параметрами немає чіткого алгоритму розв’язування, а є лише необхідна база знань з курсу алгебри та творчість самого учня.

Аналіз досліджень і публікацій. Розв’язуванню рівнянь з параметрами присвячені праці Завізіона Г.В. [2]. Особливості системної організації розв’язування нестандартних та олімпіадних задач досліджується в роботах Ясінського В.А., Мітельмана І.М., Ізюмченко Л.В., Радченка В.М., Рубльова Б.В., Федака І.В., Сарани О.О., Бродського Я. С, Сліпенка О.К., Добосевича М.С., Лейфури В.М, Е. Чена тощо [1 – 7]. Також не можна не згадати відомі монографії Гарді Г. Г., Літтлвуд Дж.Е., Пойа Г, Беккенбаха Е. та Беллмана Р. [8,9].

Не зважаючи на значну кількість досліджень це питання досить актуальне, тому що задачі такого типу зустрічаються в завданнях шкільних, районних олімпіад з математики, у завданнях для державної підсумкової атестації з математики, ЗНО.

Метою статті є вивчення та аналіз різних типів рівнянь та нерівностей з параметрами і допомога вчителям у розборі та викладанні таких завдань.

Методи дослідження. Для реалізації поставленої мети та виконання завдань статті використано теоретичні (аналіз першоджерел з проблеми дослідження, синтез, порівняння) методи дослідження.

Виклад основного матеріалу (результатів) дослідження.

Розглянемо лінійні, квадратні рівняння та нерівності з однією змінною. Приведемо типові приклади які радимо розв’язати разом з вчителем.

Приклад 1. Розв’язати рівняння $(a+2)x = a+3$

Розглянемо випадки: а) якщо $a+2 \neq 0$, то $x = \dfrac{a+3}{a+2}$;

б) якщо $a+2=0$, то рівняння має вигляд $0 \cdot x = 1$, яке немає розв’язку.

Таким чином, маємо відповідь:

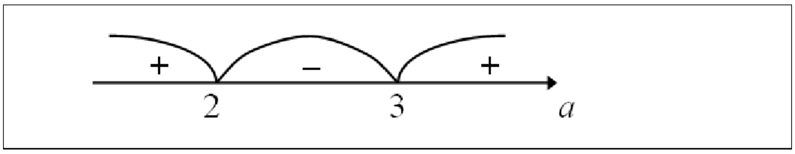
при $a = -2$, не має розв’язку; при $a \neq -2$: $x = \dfrac{a+3}{a+2}$.

Приклад 2. Розв’яжемо рівняння $(a-1)x = (a-1)(a+3)$

Розглянемо випадки: а) якщо $a \neq 1$, то $x = a+3$; б) якщо $a = 1$ то $0 \cdot x = 0$, рівняння має безліч розв’язків.

Приклад 3. Розв'яжіть нерівність $(a-2)(a-3)x \geq a(a-2)$

Наступний малюнок показує, при яких значеннях параметра а число



$(a$-2$)(a$-3) *дорівнює нулю, при якому - додатньо, а при якому – від'ємно* .

Якщо $a = 2$, тоді нерівність набуде форми $0x \geq 0$. Розв’язком отриманої нерівності є будь-яке дійсне число.

Якщо $a = 3$, тоді нерівність набуде форми $0x \geq 3$. Немає розв’язків.

Якщо $a \in (2\,;3)$, то $x \leq \dfrac{a}{a-3}$.

Якщо $a \in (-\infty;2) \cup (3;+\infty)$, то $x \geq \dfrac{a}{a-3}$.

Відповідь: при $a = 2$ $x \in R$; при а = 3 розвязків немає;

при $a \in (2;3)$ $x \leq \dfrac{a}{a-3}$; при $a \in (-\infty;2) \cup (3;+\infty)$, $x \geq \dfrac{a}{a-3}$.

Приклад 4. Розв′яжіть рівняння з параметром $(\dfrac{25}{a} - a)x = a - \dfrac{5}{a} - 4$

При $a = 0$ це рівняння втрачає своє значення, а тому не має коренів.

При $a \neq 0$ вихідне рівняння приводиться до рівняння наступного виду: $(5-a)(5+a)x = (a-5)(a+1)$.

Якщо $a = 5$, тоді рішення - це будь-яке дійсне число.

Якщо $a = -5$, тоді рівняння розв'язків не має.

Якщо $a \neq 5$ и $a \neq -5$, $x = -\dfrac{a+1}{a+5}$

Відповідь: при $a = 0$ и $a = -5$ немає розв’язків;

при $a = 5$ $x \in R$, при $a \neq -5$, $a \neq 0$ і $a \neq 5$, $x = -\dfrac{a+1}{a+5}$

Приклад 5. (З пробного ЗНО 2021 року)

Розв'яжіть рівняння $\dfrac{(x-2)(x^2-3(a-1)x+2a^2-3a)}{\log_{0,5}(3-2x)+2} = 0$, де x– змінна, а – стала.

1. Запишіть множину допустимих значень змінної x.
2. Розв'яжіть задане рівняння залежно від значень a.

<u>Розв’язування:</u>

Знайдемо множину допустимих значень

$$\begin{cases} \log_{0,5}(3-2x)+2 \neq 0 \\ 3-2x > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \neq -\dfrac{1}{2} \\ x < \dfrac{3}{2} \end{cases}$$

Тобто ОДЗ: $x \in (-\infty; -\frac{1}{2}) \cup (-\frac{1}{2}; 1,5)$

Прирівняємо чисельник до нуля і знайдемо корені цього рівняння

$$(x-2)(x^2-3(a-1)x+2a^2-3a) = 0$$

x=2 або $(x^2-3(a-1)x+2a^2-3a) = 0$.

Розв’яжемо це квадратне рівняння

$$D = \begin{array}{l} 9(a-1)^2-4(2a^2-3a) = 9(a^2-2a+1)-8a^2+12a = 9a^2-18a+9-8a^2+12a = a^2-6a+9 = \\ = (a-3)^2 \ \ \forall a \in R \end{array}$$

$$x_1 = \frac{3(a-1)+a-3}{2} = \frac{3a-3+a-3}{2} = \frac{4a-6}{2} = 2a-3$$

$$x \ = \frac{3a-3-a+3}{2} = \frac{2a}{2} = a$$

Перевіримо, чи входять знайдені значення в область допустимих значень. Зрозуміло, що x= 2 – не є коренем рівняння;

x=a: є коренем рівняння при $a \in (-\infty;-\frac{1}{2}) \cup (-\frac{1}{2};1,5)$;

x= 2a-3.

Підставимо значення в систему і отримаємо

$$\begin{cases} 2a - 3 < 1,5 \\ 2a - 3 \neq -\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a - 3 < 1,5 \\ 2a - 3 \leq\neq -\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \ a \in (-\infty;1,25) \cup (1,25;2,25).$$

Зауважимо, що коли 2a-3=a, тобто a=3, то x=3, але це не входить в область допустимих значень.

Відповідь:

при $a \in (-\infty;-\frac{1}{2}) \cup (-\frac{1}{2};1,25) \cup (1,25;1,5) : x = a \, , x = 2a - 3$;при $a = -\frac{1}{2} : x = 2a - 3$; при $a = 1.25 : x = a$;при $a \in [1,5;2,25) : x = 2a - 3$;при $a \in [2.25;+\infty]$ розв'язків немає.

Приклад 6. Знайти всі значення параметрів a, при кажному з яких рівняння $a|x-1| = x+2$ має рівно один корінь. Вкажіть цей корінь для каждого такого значення a.

Розв'язування. Для того щоб перейти від даного рівняння до рівняння, що не містить модуль, потрібно розглянути два випадки: x$\geq$1 і x<1. Після розкриття модуля вихідне рівняння прийме вид лінійного. Однак потрібно пам'ятати, що значення x, знайдене, наприклад, в першому випадку, має задовольняти умові x$\geq$ 1. В іншому випадку корінь буде стороннім. Аналогічно для другого випадку.

Таким чином, отримаємо:

1) Якщо x$\geq$1, тоді це рівняння прийме виглдя $a(x - 1) = x + 2$.

Після перетворень отримаємо $(a - 1)x = a + 2$. При $a = 1$коренів немає.

При $a \neq 1 : x = \frac{a+2}{a-1}$.

Необхідно переконатися, що значення x є коренем початкового рівняння при виконанні умови $x \geq 1$. Розв'яжемо нерівність: $\frac{a+2}{a-1} \geq 1$. Рішенням якої будуть всі

$a \in [1;+\infty)$. Таким чином, тільки при $a \in [1;+\infty)$: $x = \frac{a+2}{a-1}$.

2) Якщо x<1, тоді це рівняння прийме виглдя $-a(x-1) = x + 2$.

Після перетворень ми отримаємо $(a + 1)x = a - 2$. При $a = -1$коренів немає.

При $a \neq -1$ $x = \frac{a-2}{a+1}$. Знайдемо для яких занчень параметра буде виконуватися нерівність $\frac{a-2}{a+1} < 1$. Рішенням якої будуть всі $a \in (-1;+\infty)$.

Таким чином, при $a \in (-1;+\infty)$: $x = \frac{a-2}{a+1}$

Нанесемо на числову вісь значення параметра а, при яких початкове рівняння має знайдені корені. Отримаємо, що при $a \in (-1;1]$ рівняння має рівно один корінь. Цей корінь $x = \frac{a-2}{a+1}$.

Відповідь : $a \in (-1;1]$, $x = \frac{a-2}{a+1}$

Аналогічні завдання, для самостійного розв'язування учнями:

№ 1. Для кожного значення параметра *a* порівняйте числа.

а) a и $-a$; б) a и a^2.

№ 2. Розв'яжіть рівняння

а) $a(a+1)x = 4a(a-2)$; б) $(a-3)(a-2)x = a-3$;

в) $(a-1)(a+5)x = (a-1)(a+5)$; г) $(a-1)x + 4a^2 - 5 = (a-1)(a+5)x$.

№ 3. Розв'яжіть рівняння

а) $\frac{x}{4} + \frac{a}{3} = -a$; б) $\frac{5x}{9} - \frac{xa}{3} + \frac{4}{3} = 0$;

в) $\frac{5x-3a}{12} - \frac{1}{8} = 0$; г) $\frac{4a-5x}{9} - \frac{1}{6} = 0$.

№ 4. Розв'яжіть рівняння

а) $\frac{x(a+1)}{5} + \frac{a}{3} = 3a - x$; б) $\frac{16-x}{4} - \frac{a}{2} + 3x = \frac{a-1}{2}$;

в) $\frac{a(x-1)}{4} + \frac{x(a-1)}{2} = \frac{1}{3}$; г) $\frac{x}{2a} - \frac{2x}{3} + 5x = 4$.

№5. Знайти всі значення параметра *a*, при кожному з яких рівняння

$a|x-4|=x+2$ Має рівно два корені.

№6. Знайти всі значення параметра *a*, при кажному з яких нерівність $a|x-4|>x+2$ виконується для будь-якого дійсного *x*;

№ 7. Для кожного значення параметра *a* розв'язати рівняння $|x-a|+|x|=a$.

Висновки та перспективи подальших пошуків у напрямі дослідження. Розв’язування задач з параметром є гарним підґрунтям та підготовкою до математичних турнірів, олімпіад, ЗНО. Зрозуміло, що задачі з параметром – це специфічний тип завдань, для розв’язання яких треба бути не лише добре обізнаним в основних принципах та схемах розв’язування, а й вміти творчо підходити до їх розв’язування, мати розвинене логічне та критичне мислення. Статтю можна рекомендувати вчителям математики, студентам фізико-математичних факультетів.

Список використаної літератури

1. Кожухов С.К. Уравнения и неравенства с параметром: Уч. Пос. – Орел, 2013.- 72 с.
2. Завізіон Г.В. Рівняння з параметрами: Навч. Посібник. – Кіровоград, 1997. – 100 с.
3. Ясінський В.А., Панасенко О.Б. Секрети підготовки школярів до Всеукраїнських та міжнародних олімпіад. Алгебра. Навчально-методичний посібник. Вінниця: Середняк Т.К., 2015. 272 с.
4. Ясінський В.А. Задачі математичних олімпіад та методи їх розв’язування. Тернопіль: Навчальна книга, Богдан, 2008. 208 с.
5. Федак І.В. Методи розв’язування олімпіадних завдань з математики і не тільки їх. – Чернівці.: Зелена Буковина. 2002.- 340 с.
6. Ключник І.Г. Аналітичні методи розв’язування показникових нерівностей з параметром // Наукові записки. Серія: Проблеми методики фізико-математичної і технологічної освіти. – Кропивницький. – 2017. – Вип. 12., Ч. 3. – С. 31-36.
7. Ключник І.Г., Ізюмченко Л.В., Гаєвський М.В. Формування творчої

особистості учня на уроках математики // Наукові записки. Серія: педагогічні науки. – Кропивницький. – 2021. – Вип. 198.– С. 121-125.