УДК 372.851

ЗАСТОСУВАННЯ ЗАВДАНЬ З ПАРАМЕТРОМ В КУРСІ ШКІЛЬНОЇ МАТЕМАТИКИ

Щербина Катерина

Науковий керівник: кандидат фіз.-мат.наук, доцент Ключник І.Г.

Центральноукраїнський державний педагогічний університет імені Володимира Винниченка, м. Кропивницький, Україна

В статті значне місце приділено розв’язуванню задач з параметрами. У навчальній літературі спостерігається деякий дефіцит пояснень щодо розв’язування задач з параметрами. Відповідна література існує і навіть дуже багаточисельна, але книги, задачники і методичні посібники на цю тему нерідко мають дуже вузьку спрямованість або орієнтовані на вже підготовленого школяра. Та й у програмах з математики завданням з параметрами або практично взагалі не відводиться місця, або розглядається вузьке коло завдань, або вони розглядаються лише в 11 класі. Ці задачі є одними з найважчих у шкільній математиці. Вирішення таких завдань вимагає від школярів не тільки гарного знання стандартних методів розв'язування рівнянь, а й умінь проводити досить розгалуджені логічні побудови. Крім цього, у статті даються рекомендації з деяких моментів, що стосуються розв’язування задач з параметрами: на що слід звернути увагу при вирішенні таких завдань, з чого почати розв’язувати рівняння, що обов'язково необхідно врахувати при розв’язуванні даних задач.

Ключові слова: *параметр, рівняння, задачі з параметрами, методи розв'язування рівнянь, методи розв'язування задач з параметрами.*

Application of tasks with parameter in the course of school mathematics

K. Shcherbyna

Scientific supervisor: Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor Klyuchnik I.G.

The Volodymyr Vynnychenko Central Ukrainian State Pedagogical University, Kropyvnytsky, Ukraine

The article devotes a lot of space to solving problems with parameters. There is a shortage of explanations for solving problems with parameters in the educational literature. Relevant literature exists and even very numerous, but books, textbooks and manuals on this topic often have a very narrow focus or focused on already trained students. And in mathematics programs, problems with parameters are either not given any space at all, or a narrow range of problems is *considered, or their study is affected only in the 11th grade.*

These problems are one of the most difficult sections of school mathematics. Solving such problems requires students not only a good knowledge of standard methods of solving equations, but also the ability to conduct a fairly extensive logical constructions. In addition, the article provides recommendations on some issues related to solving problems with parameters: what to look for when solving such problems, where to start solving equations, which must be taken into account when solving these problems.

Keywords: *parameter, equations, problems with parameters, methods of solving equations, methods of solving problems with parameters.*

Постановка проблеми. Розв'язування задач з параметрами необхідно учням в наш час як при підготовці до ЗНО, так і до вступних іспитів у вищі навчальні заклади. Школярі вважають завдання з параметрами найскладнішими у шкільному курсі математики, пояснюючи це кількома причинами: труднощі у виборі способу розв'язання, відстеження «розгалужень», які виникають, дослідження всіх варіантів розв'язків [1]. Проте саме такі завдання відіграють велику роль у формуванні логічного мислення і математичної культури у школярів, Тому учні, які володіють методами вирішення завдань з параметрами, успішно справляються з іншими завданнями.

Аналіз досліджень і публікацій. Завдання на рівняння з параметром зустрічалися вже в астрономічному трактаті «Аріабхаттіам», складеному в 499 р. індійським математиком і астрономом Аріабхаттой. Інший індійський учений, Брахмагупта (VII ст.), виклав загальне правило розв'язування квадратних рівнянь, приведених до єдиної канонічної форми [3].

Мірошин В.В. [2] виділяє окрему частину математики - «абітурієнтської», яка існує окремо від шкільної програми. Дійсно, завданням з параметрами присвячені безліч збірників для вступників до вузів, в яких розглянуті різноманітні прийоми і методи розв'язування. Однак педагоги стикаються з серйозними методичними проблемами при навчанні розв'язувати такі задачі через те, що в більшості цих посібників не вчать як вибрати той чи інший спосіб розв'язання, як навчитися розв'язувати ці завдання.

Мета статті. Завдання з параметрами розглянути як моделі реальних ситуацій і прикладних процесів, а також як спосіб узагальнення математичних пропозицій, понять, завдань на уроках узагальнення і систематизації знань, для самостійної роботи.

Методи дослідження. Для реалізації поставленої мети та виконання завдань статті використано теоретичні (аналіз першоджерел з проблеми дослідження, синтез, порівняння) методи дослідження.

Виклад основного матеріалу (результатів) дослідження. Володіння прийомами вирішення завдань з параметрами можна вважати критерієм знань основних розділів шкільної математики, рівня математичного і логічного мислення.

У курсі алгебри виділяються такі основні змістово-методичні лінії: лінія числа, тотожних перетворень, лінія рівнянь, нерівностей та їх систем, геометрична, алгоритмічна, функціональна лінії, а так само ймовірно-статистична лінія, що з'явилася останнім часом. Проте обмеженість кола завдань, однотипність алгоритмів, властивих їм, не може задовольняти сучасним потребам шкільної освіти. У середній та старшій школі превалює класичний підхід до викладання не лише математики, а й більшості предметів. Це пояснюється низкою причин методичного та психологічного характеру, у тому числі й відсутністю інструментарію реалізації завдань розвиваючої освіти, необхідного сучасним учням.

Таким інструментарієм в курсі математики, на мій погляд, може стати змістово-методична лінія задач з параметрами. Глибока, багата ідеями та методами – змістово-методична лінія завдань з параметрами якнайкраще дозволить розвинути активну творчу діяльність учня, його системне мислення, підготувати його до вирішення творчих завдань.

Розглянемо деякі загальні підходи при розв'язуванні певних типів рівнянь з параметрами.

Приклад 1. Розв’яжемо рівняння $5(x-2a)=4-ax$.

Після зведення до лінійного рівняння одержимо $x(5+a)=4+10a$.

Розглянемо випадки:

а) якщо $a \neq -5$ то $x = \dfrac{4+10a}{a+5}$;

б) якщо $a = -5$ то $0 \cdot x = -46$, рівняння не має розв'язку.

Приклад 2. Розв'яжемо рівняння $\dfrac{6x+a}{4} + \dfrac{8-5xa}{3} = 5$.

Рівняння зводимо до лінійного $x(18-20a) = 28-3a$.

Розглянемо випадки:

а) якщо $18-20a \neq 0$ то $x = \dfrac{28-3a}{18-20a}$;

б) якщо $18-20=0$ то рівняння не має розв'язку .

Отже при $a \in (-\infty;0,9) \cup (0,9;+\infty) : x = \dfrac{28-a}{18-20a}$; при а= 0,9 розв'язків не має.

Приклад 3. Розв'яжемо рівняння: $\dfrac{1}{x} = \dfrac{b}{a-x}$ *(1)* відносно х [4, с. 20].

Область допустимих значень невідомого і параметрів *x ≠ 0,x ≠ a.*

Маємо: *a - x = вx, (в + 1)x = a (*2)

а) якщо *в=-1 , а=0*, то рівняння (2) має вигляд *0х=0.* Це рівняння справджується для будь-яких значень *х*, що входять до області допустимих значень.

б) якщо *в=-1 , а ≠ 0* , то рівняння має вигляд *0х= а*. Коренів немає.

в) якщо *в≠- 1*, то рівняння має єдиний розв'язок: $x = \dfrac{a}{b+1}$.

г) перевіримо, при яких значеннях параметрів *а* і *в* знайдений корінь задовольняє рівняння.

Виходячи з умови*, х≠0 та а-х≠ 0* .

Отже, $\dfrac{a}{b+1} \neq 0$ *та* $a - \dfrac{a}{b+1} \neq 0$.

Звідси *а≠0* та *в≠0* .

<u>Відповідь:</u> якщо *в=-1 , а=0* , то рівняння має безліч коренів, тобто має сенс при будь-яких дійсних *х*, крім *х = 0 ,х = а;*

Якщо *в = - 1, а ≠ 0* , то розв'язків немає.

Якщо *х ≠ а , а ≠ 0, в ≠ 0 , то* $x = \dfrac{a}{b+1}$.

Приклад 4. Розв'язати рівняння: $\sqrt{x-\sqrt{x-a}}=a$ [4, с. 24].

Введемо нову змінну $y=\sqrt{x-a}$. Тоді рівняння рівносильне системі

$$\begin{cases}\sqrt{x-y}=a,\\ \sqrt{x-a}=y,\end{cases}\quad \begin{cases}y\ge 0, a\ge 0,\\ x-y=a^2,\\ x-a=y^2,\end{cases}\quad \begin{cases}y\ge 0, a\ge 0,\\ a-y=a^2-y^2,\\ \sqrt{x-a}=y,\end{cases}\quad \begin{cases}y\ge 0, a\ge 0,\\ (a-y)(a+y-1)=0\\ \sqrt{x-a}=y\end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\sqrt{x-a}=a,\\ a\ge 0\end{cases}\\ \begin{cases}\sqrt{x-a}=1-a,\\ 0\le a\le 1\end{cases}\end{array}\right.\qquad \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=a^2+a,\\ a\ge 0\end{cases}\\ \begin{cases}x=a^2-a+1,\\ 0\le a\le 1.\end{cases}\end{array}\right.$$

Відповідь: $x_1=a^2+a$, $x_2=a^2-a+1$ при $a\in[0;1]$;

$x=a^2+a$ при $a>1$;

$x\in\varnothing$ при $a<0$.

Приклад 5. (№33 ЗНО 2013) Знайдіть значення параметра а, при якому корінь рівняння $\lg(\sin 5\pi x)=\sqrt{16+a-x}$ належить проміжку $\left(\frac{3}{2};2\right)$.

Оцінимо множину значень функцій у лівій і правій частинах рівняння Так як найбільше значення синуса одиниця, а логарифм одиниці нуль і логарифм за основою десять зростаюча функція, то множина значень лівої частини не більша за нуль. Функція у правій частині невід'ємна і її множина значень не менша за нуль. Значить рівність можлива коли обидві частини рівняння рівні нулю. Отримуємо систему: $\begin{cases}\lg(\sin 5\pi x)=0,\\ \sqrt{16+a-x}=0\end{cases}$; $\begin{cases}\sin(5\pi x)=1,\\ 16+a-x=0\end{cases}$;

$$\begin{cases}x=\frac{1}{10}+\frac{2n}{5}, n\in Z,\\ a=x-16\end{cases}.$$

Знайдемо значення n при якому корінь належить інтервалу $\left(\frac{3}{2};2\right)$.

$$\frac{3}{2}<\frac{1}{10}+\frac{2n}{5}<2;\ 15<1+4n<20;\ 14<4n<19;\ 3{,}5<n<4{,}75.$$

Так як *n* ціле число, то $n = 4$. Значить $x = \frac{1}{10} + \frac{2 \cdot 4}{5} = 1,7, \quad a = 1,7 - 16 = -14,3.$

Графічне розв'язування, на мою думку , було б набагато складніше.

Відповідь: -14,3.

Приклад 6. (№34 ЗНО 2014) Знайдіть найбільше значення параметр *a,* при якому система рівнянь $\begin{cases} (2a-5)\cdot \sin x + cosx = 2, \\ (a-2)\cdot \sin x + (2a-5)\cdot cosx = a-1 \end{cases}$ має безліч розв'язків.

Помножимо перше рівняння системи на *2a-5* і віднімемо друге. В результаті отримаємо:

$\sin x = \frac{3a-9}{4a^2-21a+27} = \frac{3(a-3)}{(a-3)(4a-9)} = \frac{3}{4a-9}$. ($a \neq 3$ і $a \neq \frac{9}{4}$,бо при $a = 3$ і $a = \frac{9}{4}$

рівняння перетворюються у неправильні рівності.) З першого рівняння одержимо, що $\cos x = \frac{2a-3}{4a-9}$. Щоб система мала безліч розв'язків знайдені значення повинні задовольняти основну тригонометричну тотожність $\sin^2 x + \cos^2 x = 1.$

Значить: $\frac{9}{16a^2-72a+81} + \frac{4a^2-12a+9}{16a^2-72a+81} = 1,$ або $4a^2 - 20a + 21 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 1,5 \\ a = 3,5. \end{array} \right.$

Умову задовольняє значення $a = 3,5.$

Відповідь: 3,5.

Висновки та перспективи подальших пошуків у напрямі дослідження. Розв'язування задач, рівнянь з параметрами, відкриває перед учнями значну кількість евристичних прийомів загального характеру, цінних для математичного розвитку особистості, що застосовуються в дослідженнях і на будь-якому іншому математичному матеріалі. Алгоритму розв'язання рівнянь з параметрами немає. Але в роботі показано деякі способи розв'язування подібних рівнянь. І, таким чином, в даній статті вказані основні напрямки, за якими слід йти при розв'язуванні рівнянь з параметрами.

Список використаної літератури

1. Литвинова І. Н. Рішення задач з параметрами як засіб формування дослідницьких умінь учнів//Науково-методичний електронний

журнал«Концепт».-2015.-Т.6.-С.11-15.-URL:http://e-koncept.ru/2015/65203.htm

2. Мирошин В.В. Рішення задач з параметрами. Теорія і практика / В.В.Мірошін. - М.: Видавництво «Іспит», 2009.-286с.

3. Нестандартні прийоми розв'язування рівнянь [Електронний ресурс] – Режим доступу до ресурсу: https://referaty.pp.ua/abstracts/ua/mathematic/mathematic_14476_3.php

4. Рівняння з параметрами (посібник для пiготовки до ЗНО) [Електронний ресурс] – Режим доступу до ресурсу: https://vseosvita.ua/library/rivnanna-z-parametrami-posibnik-dla-pigotovki-do-zno-254411.html