УДК 519.85

АНАЛІЗ ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДУ РОЗВ'ЯЗАННЯ НЕСТАЦІОНАРНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ В ЧАСТИННИХ ПОХІДНИХ З ВИКОРИСТАННЯМ РЯДІВ ТЕЙЛОРА ЗА ЧАСОМ ДЛЯ ЗАДАЧ МЕХАНІКИ

Нога Антон

Науковий керівник: доктор технічних наук, професор Казачков І. В

Центральноукраїнський державний педагогічний університет імені Володимира Винниченка, м. Кропивницький, Україна

Робота присвячена аналізу використання методу розв'язання нестаціонарних диференціальних рівнянь в частинних похідних з використанням рядів Тейлора за часом , який дозволяють вирішити деякі задачі механіки. Особливістю представленого аналізу є реалізація алгоритму, як можливість використання та виконання для задачі обтікання частинки в рідині з нагріванням або охолодженням частинки.

Ключові слова: алгоритм, задача механіки, диференціальні рівняння.

Analysis of application of the method of solving non-stationary of differential equations in partial derivatives using Taylor rows for time for mechanical problems

A. Noha

Scientific supervisor: Doctor of Technical Sciences Kazachkov I.V.

The Volodymyr Vynnychenko Central Ukrainian State Pedagogical University, Kropyvnytskyi, Ukraine

The work is devoted to the analysis of the use of the method of solving nonstationary differential equations in partial derivatives using Taylor series over time, which allows to solve some problems of mechanics. A feature of the presented analysis is the implementation of the algorithm, as an opportunity to use and perform for the task of flowing the particle in the liquid with heating or cooling of the particle.

Keywords: algorithm, problems of mechanics, differential equations.

Постановка проблеми. Все більше дослідників та інженерів в даний час використовують складні математичні моделі для розв'язання практичних задач аналізу процесів, які відбуваються в об'єктах дослідження, оцінювання його характеристик, проектування.

Для цього застосовуються різноманітні аналітичні методи, коли результат отримується шляхом перетворень моделі на основні правил і законів відповідного розділу математики, або числові, коли результат отримується шляхом обчислень за допомогою певних комп'ютерних алгоритмів.

Актуальність обраної теми обумовлена в основному швидкістю досліджень в галузях механіки і фізики, що викликає збільшення складності завдань та рівнянь , що виникають у процесі розв'язання задач аналізу різноманітних процесів .

Впровадження новітніх технологій сприяє підвищенню способів реалізації та використання математичних методів для спрощення життя людей , в наслідок чого виникає необхідність не тільки в вирішенні математичних моделей , а й програмування їх за допомогою сучасних мов програмування.

Аналіз досліджень і публікацій. Дослідження шляхів використання рядів Тейлора за часок для розв'язування нестаціонарних рівнянь все більше звертають увагу дослідників з усього світу. В Україні дослідженнями такого роду займався такий видатний вчений як Казачков І.В..

При аналізі цієї теми слід звернути увагу на роботу[1] , де розглянуто комбінований дискретний алгоритм з використанням рядів Тейлора. Зведення розв'язку нестаціонарних крайових задач до стаціонарних із застосуванням послідовного диференціювання рівнянь за часом та використанням розкладів в ряди Тейлора за часом в задачах механіки рідини [2-3].

Мета роботи.

Дослідити та реалізувати алгоритм методу розв'язання нестаціонарних диференціальних рівнянь в частинних похідних з використанням рядів Тейлора за часом для однієї з задач механіки для подальшого програмування.

Виклад основного матеріалу (результатів) дослідження.

Переважна більшість об'єктів є нестаціонарними та працюють в динамічних режимах, тобто вони змінюються у часі під впливом внутрішніх і зовнішніх чинників. Як моделі динаміки таких об'єктів використовуються диференціальні рівняння. Для їх розв'язання найпростіших задач використовують аналітичні методи.

Але аналітичні методи дозволяють знайти розв’язок невеликої кількості типів рівнянь, тому їх застосування є дуже обмежене. На відміну від них чисельні методи дозволяють розв’язувати значно більшу кількість задач.

З розв’язанням диференціальних рівнянь в частинних похідних (differential equations in partial derivatives) інженерам і дослідникам доводиться зустрічатися у багатьох галузях науки і техніки: в аеро- та гідродинаміці, ядерній фізиці, радіозв’язку, теплотехніці. В таких рівняннях міститься частинні похідні і шукана величина залежить від декількох змінних.

Одним із чисельних методів для розв’язання задач такого типу є «метод розв’язання нестаціонарних диференціальних рівнянь в частинних похідних з використанням рядів Тейлора за часом».

Опишемо процес застосування даного методу до однієї з задач механіки , а саме задачі обтікання частинки в рідині з нагріванням або охолодженням частинки та алгоритм для подальшого програмування.

Дана реалізація алгоритму реалізує чисельне вирішення наступного крайового завдання для двовимірного нестаціонарного рівняння у частинних похідних, записаного в полярній системі координат:

$$\Big\{ \frac{\partial}{\partial\rho} - \frac{\partial^2}{\partial\rho^2} - \Big[\frac{2}{\rho} - \frac{\mathrm{Pe}}{2}\cos\vartheta\Big(1 - \frac{3}{2\rho} + \frac{1}{2\rho^3}\Big)\Big]\frac{\partial}{\partial\rho} - \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\vartheta^2} -$$

$$-\Big[\frac{\operatorname{ctg}\vartheta}{\rho^2} + \frac{\mathrm{Pe}}{2}\frac{\sin\vartheta}{\rho}\Big(1 - \frac{3}{4\rho} - \frac{1}{4\rho^3}\Big)\Big]\frac{\partial}{\partial\vartheta}\Big\} T = 0,$$

$$1 < \rho < \infty, \qquad 0 \leqslant \vartheta \leqslant \pi, \qquad 0 < \tau < \infty$$

$$T\big|_{\rho=1} = T_s(\vartheta, \tau); \qquad T\big|_{\rho=\infty} = 0 \qquad T\big|_{\tau=0} = 0$$

$$\rho = \frac{r}{R}; \qquad \tau = \frac{at}{R^2}; \qquad \mathrm{Pe} = \frac{2UR}{a}$$

Алгоритм

1. Необхідно почати з побудови кінцево-різницевої сітки в області течії, включаючи сферичну частинку в потоці:

$\rho_i = (i - 1/2)\Delta\rho$, i=1, 2, …, M, D$r = r_{max}/(M - 1/2)$

$\theta_j = j\Delta\theta$, j=0,1,…,N-1, D$q = 2p/N$

$\tau_n = n\Delta\tau$, n=0,1,2,…

$$h = \max\{\ \Delta r,\ \Delta\theta\ \}$$

Тут кроки по простору і часу вибираються з міркувань точності розрахунку і необхідного інтервалу за часом, необхідного для процесу, що розглядається.

2. Далі апроксимуються похідні за простором за формулами:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{f_n^{i+1,j} - f_n^{i-1,j}}{2\Delta x}, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{f_n^{i+1,j} - 2f_n^{i,j} + f_n^{i-1,j}}{(\Delta x)^2}.$$

На межі області так $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{f_n^{3,j} - 2f_n^{2,j} + f_n^{1,j}}{2\Delta x}$.

Індекс n вказує на належність величин відповідного тимчасового шару. У ці формули підставити, відповідно, T замість f і замість x по черзі одну і другу змінні r, q.

3. Необхідно ввести такі масиви даних:

$T_0(\rho,\theta), T_s(\theta,\tau), F_1(\rho,\theta,\tau), F_2(\rho,\theta,\tau), \ldots$ - до заданого числа К.
Далі: $T(\rho,\theta,\tau), DT(\rho,\theta,\tau), \ldots, DKT(\rho,\theta,\tau)$

4. Обчислити функції:

$$F_1(\rho,\theta,\tau) = \frac{\partial^2 T}{\partial\rho^2} + \left[\frac{2}{\rho} - \frac{Pe}{2}\cos\theta\,(1 - \frac{3}{2\rho} + \frac{1}{2\rho^3})\right]\frac{\partial T}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 T}{\partial\theta^2} +$$
$$+\left[\frac{ctg\theta}{\rho^2} + \frac{Pe}{2}\frac{\sin\theta}{\rho}(1 - \frac{3}{4\rho} - \frac{1}{4\rho^3})\right]\frac{\partial T}{\partial\theta}$$

$F_2(\rho,\theta,\tau) = F_1(F_1)$ - підставити у вираз для F_1 (вище) замість T функцію F_1 и і так далі: наступну отриману $F_3(\rho,\theta,\tau) = F_1(F_2)$ отримане $F_2(\rho,\theta,\tau) = F_1(F_1)$.

Потім

$$T_1(\rho,\theta,\tau) = T_0(\rho,\theta) + F_1(\rho,\theta,\tau_0)\Delta\tau + \ldots + \frac{1}{n!}F_n(\rho,\theta,\tau_0)(\Delta\tau)^n$$
$$= T_0(\rho,\theta) + \sum_{n=1}^{K}\frac{1}{n!}F_n(\rho,\theta,\tau_0)(\Delta\tau)^n$$

………………………………………………………………………………

$$T_m(\rho,\theta,\tau_m) = T_{m-1}(\rho,\theta,\tau_{m-1}) + \sum_{n=1}^{K}\frac{1}{n!}F_n(\rho,\theta,\tau_{m-1})(\Delta\tau)^n$$
(**)

$\tau_m = \tau_{m-1} + \Delta\tau.$

5. Вивести значення $T(\rho,\theta,\tau)$ та $(\partial T/\partial\rho)_{\rho=1}$ із заданим кроком за часом (по τ).

6. Розрахунок у пункті 4 вести для кожного моменту часу таким чином, щоб порівняння обчислень на двох послідовних сітках за часом з кроками $\Delta\tau_m$ (k) та $\Delta\tau_m/2$ (k+1) відрізнялося не більше ніж на задану величину похибки:
$\left|\frac{T_k - T_{k+1}}{T_k}\right| < \varepsilon$, де e – задана точність.

7. Розрахунок за рівнянням (**) вести до першого, другого, третього і так далі наближення (мати все для порівняння: з точністю до Δt – перший порядок точності, до $(\Delta t)^2$ – другий, $(\Delta t)^3$ – третій і так далі).

Передбачити завдання у вихідних даних числа бажаних наближень: 1 першого, 2 другого і так далі.

Висновки та перспективи подальших пошуків у напрямі дослідження.

В ході статті було описано та реалізовано алгоритм методу розв’язання нестаціонарних диференціальних рівнянь в частинних похідних з використанням рядів Тейлора за часом для однієї з задач механіки , а саме обтікання частинки в рідині з нагріванням або охолодженням частинки. Отримане вирішення дозволить в майбутньому запрограмувати цей алгоритм та автоматизувати розрахунки задач такого типу.

Враховуючи, що була розглянута лише одна з задач механіки , можна зробити висновок , що застосування даного методу можливе і для інших здач механіки , що потребує розробки узагальненого алгоритму та його реалізації однією з сучасних мов програмування .

Список літератури

1. Kazachkov I.V. A combined space discrete algorithm with a Taylor series by time for CFD// WSEAS Transactions on fluid mechanics.- Issue 1, Volume 6, January 2011.- P. 51-69 ;

2. Kazachkov Ivan., Sergeichik Yevgen. Application of Combined Space Discrete Numerical Algorithm with a Taylor Series by Time for Simulation in Continua/ Proc. 4 IASME/WSEAS Int. Conf. on CONTINUUM MECHANICS (CM’09).- Cambridge, UK.- February 24-26, 2009.- p.120-125..

3. Казачков И.В., Казачкова Е.И. Метод численного решения нестационарных уравнений гидродинамики и теплообмена// Энергетика.- 2007.- № 2.- С. 65-71;