УДК 532.59

ДИНАМІЧНЕ РІВНЯННЯ СТАЦІОНАРНИХ НЕЛІНІЙНИХ ХВИЛЬ НА ПОВЕРХНІ РІДИНИ ЗІ СКІНЧЕННОЮ ГЛИБИНОЮ

Чалий Сергій

Науковий керівник: доктор фіз.-мат. наук, проф.Авраменко О.В.

Центральноукраїнський державний педагогічний університет імені Володимира Винниченка, м. Кропивницький, Україна

В статті досліджено поширення випадкових поверхневих гравітаційних хвиль ідеальної нестисної рідини скінченної глибини. Розглядаються поля відхилень, потенціалів швидкостей і атмосферного тиску на вільній поверхні, що відповідають умовам квазіоднорідності та квазістаціонарності, тому вказані величини представлені у вигляді розкладів в інтегралах Фур'є-Стилтьєса. Отримано динамічне рівняння в інтегральній формі для стохастичної амплітуди поля відхилень через розвинення у ряд за малим параметром. Проведено додаткову симетризацію підінтегральних функцій двух і трьох хвильової взаємодії.

Ключові слова: Випадкові гравітаційні хвилі, динамічне рівняння, ряди Фур'є-Стілтьєса, симметризація.

Dynamic equation of stationary nonlinear waves on the surface of finite depth liquid

Scientific supervisor: Doctor of Physics and Mathematics Sciences, Professor Avramenko O.V.

Volodymyr Vynnychenko Central Ukrainian State Pedagogical University, Kropyvnytsky, Ukraine

The paper describes the study of the propagation of random surface gravitational waves of an ideal incompressible finite depth fluid. Since the fields of deviations, velocity potentials, and atmospheric pressure on the free surface correspond to the conditions of quasi-homogeneity and quasi-stationarity, they were presented for the study in the form of expansions in Fourier-Stiltjes integrals. A dynamic equation in integral form for the stochastic amplitude of the field of deviations due to development in a series by a small parameter is obtained. Additional symmetrization is performed for subintegral functions of the two and three wave interaction

Keywords: Random gravitational waves, dynamic equation, Fourier-Stilties series, symmetrization.

1. Постановка задачі. Застосуємо підхід запропонований в роботі Полнікова [1]. Вихідні рівняння стаціонарної теорії нелінійних хвиль на поверхні однорідної, нестискуваної рідини, без врахування поверхневого натягу, у випадку рідини скінченної глибини, в безрозмірних величинах мають вигляд:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\frac{1}{2}\alpha\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2\right]=-\eta-\mathrm{P}|_{z=\alpha\eta}\quad,$$

(1)

$$\frac{\partial\eta}{\partial t}+\alpha\left[\frac{\partial\eta}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{\partial\eta}{\partial y}\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right]=\frac{\partial\varphi}{\partial z}|_{z=\alpha\eta}\,,$$

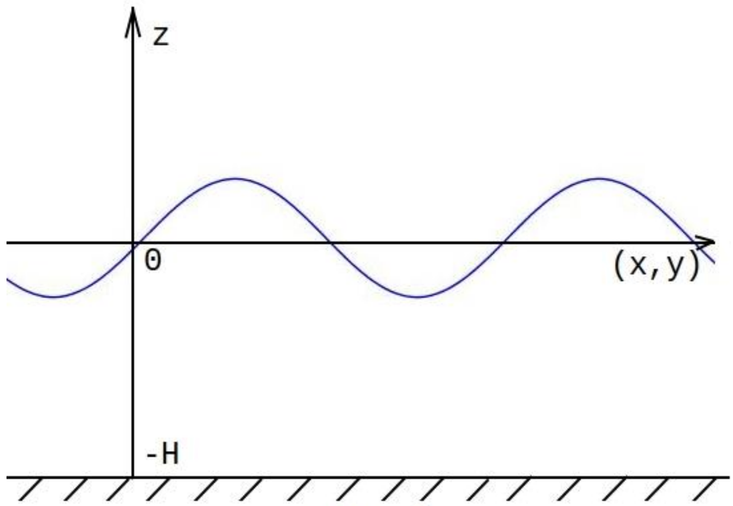
(2)

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}=0,$$

(3)

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z}|_{z=-H}=0. \qquad (4)$$

- де $\varphi(\boldsymbol{x},z,t)$ - повний потенціал поля течії $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},z,t)$, який пов'язаний із $\boldsymbol{u}$ співвідношенням $\mathbf{u}=\overrightarrow{\nabla_3}\,\varphi$; $\eta(\boldsymbol{x},t)$ - поле підвищення вільної поверхні; P - поле атмосферного тиску на вільну поверхню, нормоване за густиною рідини ρ; H - товщина шару рідини,α - характерний параметр теорії, $\alpha=\frac{a}{L}$ – де a - максимальне відхилення η , L - характерна довжина хвилі. Незбурену плоску поверхню рідини приймемо за координатну площину $XY(z=0)$,



мал. 1

рівню дна відповідає рівняння $z\ =\ -H$ (мал.1).

Розглянемо рівняння (1)-(4) на масштабах простору і часу, що задовольняють умовам квізіоднорідності і квазілінійності. В такому випадку можна розкласти всі випадкові поля в ряди Фур'є-Стільтьєса:

$$\eta(\boldsymbol{x}, t) = \int_{\boldsymbol{q}} e^{i\chi} B_{\boldsymbol{q}} \mathrm{d}\boldsymbol{q}, \tag{5}$$

$$\varphi(\boldsymbol{x}, z, t) = \int_{\mathbf{q}} \mathrm{ch}[k(z+H)] e^{i\chi} A_{\mathbf{q}} d\mathbf{q}, \tag{6}$$

$$P(\boldsymbol{x}, t) = \int e^{i\chi} C_{\mathbf{q}} d\mathbf{q}. \tag{7}$$

тут $\chi = \boldsymbol{kx} - \omega t$ - фазова змінна, $\boldsymbol{k} = (k_x, k_y)$ - горизонтальний хвильовий вектор; $k = |\boldsymbol{k}|$ - модуль хвильового вектора, - узагальнена фазова координата Фур'є розкладу, для диференціала якого прийнято позначення . Величини $A_{\boldsymbol{q}} \equiv A(\boldsymbol{q}), B_{\boldsymbol{q}} \equiv B(\boldsymbol{q}), C_{\boldsymbol{q}} \equiv C(\boldsymbol{q})$ - стохастичні амплітуди відповідних полів. Конкретний вигляд залежності потенціала від z (6) слідує із необхідності виконання рівностей (3),(4).

Розкладемо $ch[k(\alpha\eta + H)]$ в ряд по α з точністю до α^2 :

$$\mathrm{ch}[k(\alpha\eta + H)] = \mathrm{ch}(k\alpha\eta)\mathrm{ch}(kH) + \mathrm{sh}(k\alpha\eta)\mathrm{sh}(kH) =$$

$$= [1 + k^2\alpha^2\eta^2]\mathrm{ch}(kH) + k\alpha\eta sh(kH).$$

(8)

Застосовуючи метод Масуди [2] , з точністю до α^2 , отримуемо наступу систему рівнянь:

$$-\mathrm{i}\omega A_q \mathrm{ch}(kH) + B_q = -C_q + \Sigma(\boldsymbol{q}),$$

(9)

$$i\omega B_q + ksh(kH)A_q = \Pi(\boldsymbol{q}).$$

(10)

- де $\Sigma(\boldsymbol{q})$ і $\Pi(\boldsymbol{q})$ - доданки, обумовлені нелінійністю системи (1)-(4), вони мають наступний вигляд:

$$\Sigma(\mathbf{q}) = \alpha \mathrm{I}_1 + \frac{\alpha^2}{2}\mathrm{I}_2 ,$$

(11)

$$\mathrm{I}_1 = \int \left[i\omega_1 k_1 sh(k_1 H) B_{\boldsymbol{q}-\boldsymbol{q_1}} - \frac{1}{2} M(\boldsymbol{k_1}, \boldsymbol{k} - \boldsymbol{k_1}) A_{\boldsymbol{q}-\boldsymbol{q_1}} \right] A_{\boldsymbol{q_1}} \boldsymbol{dq_1},$$

(12)

$$M(k_1; k_2) = k_1 k_2 sh(k_1 H) sh(k_2 H) - (\boldsymbol{k}_1, \boldsymbol{k}_2) ch(k_1 H) ch(k_2 H),$$

(13)

$$I_2 = \iint \left(i\omega_1 k_1^2 B_{q_2} - N(\boldsymbol{k_1}, \boldsymbol{k_2}) A_{\boldsymbol{q_2}} \right) A_{\boldsymbol{q_1}} B_{\boldsymbol{q}-\boldsymbol{q_1}-q_2} \boldsymbol{dq_1 dq_2},$$

(14)

$$N(k_1; k_2) = k_1 k_2 [c_1 k_1 s_2 + c_2 k_2 s_1] - (\boldsymbol{k}_1, \boldsymbol{k}_2)[s_1 k_1 c_2 + s_2 k_2 c_1],$$

(15)

- де $s_i = sh(k_i H)$, $c_i = ch(k_i H)$.

$$\Pi(\mathbf{q}) = -\alpha \int (\boldsymbol{k}_1, \boldsymbol{k}) \mathrm{ch}(k_1 H) A_{\boldsymbol{q_1}} B_{\boldsymbol{q}-\boldsymbol{q_1}} \boldsymbol{dq_1} +$$

$$-\frac{\alpha^2}{2} \iint [2(\boldsymbol{k_1}, \boldsymbol{k_2}) + k_1^2] k_1 sh(k_1 H) A_{\boldsymbol{q_1}} B_{\boldsymbol{q_2}} B_{\boldsymbol{q}-\boldsymbol{q_1}-q_2} \boldsymbol{dq_1 dq_2}.$$

(16)

Рівняння (9) і (10) є наслідками рівняннь (1) і (2) відповідно.

2.Наближення першого порядку. Система (11),(12) перетворюється в одне рівняння відносно амплітуди поля підвищень шляхом знаходження виду амплітуди потенціалу методом послідовних наближень. Представимо у вигляді ряду по степеням :

$$A(\boldsymbol{q}) = A_1(\boldsymbol{q}) + \alpha A_2(\boldsymbol{q}) + \alpha^2 A_3(\boldsymbol{q}) + \cdots \tag{17}$$

Так в першому (лінійному) наближенні із (10) слідує:

$$A_1(\boldsymbol{q}) = \frac{-i\omega}{ksh(kH)} B(\boldsymbol{q}).$$

(18)

Підстановка $A_1(\boldsymbol{q})$ в праву частину (10), і врахування членів не вище другого порядку нелінійності, дає друге наближення [3]:

$$A_2(\boldsymbol{q}) = \int \frac{i\omega_1(\boldsymbol{k_1},\boldsymbol{k})ch(k_1H)}{k_1ksh(k_1H)sh(kH)} B_{\boldsymbol{q_1}} B_{\boldsymbol{q}-\boldsymbol{q_1}} \boldsymbol{dq_1}, \tag{19}$$

Далі підставимо $A(\boldsymbol{q}) = A_1(\boldsymbol{q}) + \alpha A_2(\boldsymbol{q})$ в (9) і після приведення всіх подібних і симетризації отримаємо:

$$\left[1 - \frac{\omega^2}{k} cth(kH)\right] B_{\boldsymbol{q}} + C_{\boldsymbol{q}} = \alpha \int f_2(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{q}_1) B_{\boldsymbol{q_1}} B_{\boldsymbol{q}-\boldsymbol{q_1}} \boldsymbol{dq_1}, \tag{20}$$

$$f_2(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{q_1}) = \frac{1}{2}\omega^2 + \frac{1}{2}{\omega_1}^2 + \frac{1}{2}\omega_1\omega \ +$$

$$-\frac{1}{2}\omega\,(\omega - \omega_1)\langle \boldsymbol{k}\,, \boldsymbol{k} - \boldsymbol{k}_1\rangle cth(k\,H) cth(|\boldsymbol{k} - \boldsymbol{k}_1|H) +$$

$$-\frac{1}{2}\omega_1(\omega - \omega_1)\langle \boldsymbol{k}_1, \boldsymbol{k} - \boldsymbol{k}_1\rangle cth(k_1H) cth(|\boldsymbol{k} - \boldsymbol{k}_1|H) +$$

$$-\frac{1}{2}\omega_1\omega\langle \boldsymbol{k}_1, \boldsymbol{k}\rangle cth(k_1H) cth(kH). \tag{21}$$

- де $\langle \boldsymbol{k}_1, \boldsymbol{k}_2\rangle = (\boldsymbol{k}_1, \boldsymbol{k}_2)/k_1k_2$- косинус кута між векторами $\boldsymbol{k}_1$і $\boldsymbol{k}_2$. $f_2(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{q_1})$ має властивості симетрії: $f_2(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{q_1}) = f_2(\boldsymbol{q_1}, \boldsymbol{q}) = f_2(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{q} - \boldsymbol{q_1})$.

3.Наближення третього порядку. Знайдемо третє наближення для амплітуди потенціалу. Підставимо $A_1(\boldsymbol{q})$, $A_2(\boldsymbol{q})$ в праву частину (10), враховуючи члени не вище другого порядку нелінійності, та скоротивши рівні доданки з обох сторін рівності маемо формулу для третього наближення:

$$A_3(\boldsymbol{q}) = \frac{1}{ksh(kH)}[I_1(A_2(\boldsymbol{q_1})) + I_2(A_1(\boldsymbol{q_1}))], \qquad (22)$$

$$I_1(A_2(\boldsymbol{q_1})) = -\int (\boldsymbol{k}_1, \mathbf{k}) ch(k_1H) B_{\boldsymbol{q}-\boldsymbol{q_1}} \boldsymbol{dq_1} \int \frac{i\omega_2(\boldsymbol{k}_1, \boldsymbol{k}_2) ch(k_2H)}{k_1k_2 sh(k_1H) sh(k_2H)} B_{\boldsymbol{q_2}} B_{\boldsymbol{q_1}-\boldsymbol{q_2}} \boldsymbol{dq_2} =$$

$$-\iint \frac{i\omega_2(\boldsymbol{k}_1, \mathbf{k})(\boldsymbol{k}_1, \boldsymbol{k}_2)}{k_1k_2} cth(k_1H) cth(k_2H) B_{\boldsymbol{q}-\boldsymbol{q_1}} B_{\boldsymbol{q_2}} B_{\boldsymbol{q_1}-\boldsymbol{q_2}} \boldsymbol{dq_1} \boldsymbol{dq_2} =$$

$$-\iint \frac{i\omega_2(\boldsymbol{k}_1+\boldsymbol{k}_2, \boldsymbol{k})(\boldsymbol{k}_1+\boldsymbol{k}_2, \boldsymbol{k}_2)}{|\boldsymbol{k}_1+\boldsymbol{k}_2| k_2} cth(|\boldsymbol{k}_1 + \boldsymbol{k}_2|H) cth(k_2H)) B_{\boldsymbol{q_1}} B_{\boldsymbol{q_2}} B_{\boldsymbol{q}-\boldsymbol{q_1}-\boldsymbol{q_2}} \boldsymbol{dq_1} \boldsymbol{dq_2}, \qquad (23)$$

$$I_2(A_1(\boldsymbol{q_1})) = \frac{1}{2}\iint [2(\boldsymbol{k_1}, \boldsymbol{k_2}) + k_1^2] \mathrm{i}\omega_1 B_{\boldsymbol{q_1}} B_{\boldsymbol{q_2}} B_{\boldsymbol{q}-\boldsymbol{q_1}-\boldsymbol{q_2}} \boldsymbol{dq_1} \boldsymbol{dq_2}. \qquad (24)$$

Підставимо $A(\boldsymbol{q}) = A_1(\boldsymbol{q}) + \alpha A_2(\boldsymbol{q}) + \alpha^2 A_3(\boldsymbol{q})$ в (9):

$$\left[1 - \frac{\omega^2}{k} cth(kH)\right] B_{\boldsymbol{q}} + C_{\boldsymbol{q}} = \alpha \int f_2(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{q}_1) B_{\boldsymbol{q_1}} B_{\boldsymbol{q}-\boldsymbol{q_1}} \boldsymbol{dq_1} + \alpha^2 (F_1 + F_2 + F_3), \qquad (25)$$

$$F_1 = \mathrm{i}\omega A_{\boldsymbol{3}} \mathrm{ch}(kH) = \iint \frac{\omega}{k} cth(kH) \{ \frac{\omega_2(\boldsymbol{k}_1+\boldsymbol{k}_2, \boldsymbol{k})(\boldsymbol{k}_1+\boldsymbol{k}_2, \boldsymbol{k}_2)}{|\boldsymbol{k}_1+\boldsymbol{k}_2| k_2} cth(|\boldsymbol{k}_1 + \boldsymbol{k}_2|H) cth(k_2H) +$$

$$-\frac{1}{2}\omega_1[2(\boldsymbol{k_1}, \boldsymbol{k_2}) + k_1^2] \} B_{\boldsymbol{q_1}} B_{\boldsymbol{q_2}} B_{\boldsymbol{q}-\boldsymbol{q_1}-\boldsymbol{q_2}} \boldsymbol{dq_1} \boldsymbol{dq_2},$$

$$F_3 = -\iint [\frac{{\omega_1}^2 {k_2}^2 cth(k_1H)}{k_1} + \omega_1\omega_2 \{ k_1 cth(k_1H) + k_2 cth(k_2H) - \langle \boldsymbol{k}_1, \boldsymbol{k}_2 \rangle (k_1 cth(k_2H) +$$

$$k_2 cth(k_1H)) \}] B_{\boldsymbol{q_1}} B_{\boldsymbol{q_2}} B_{\boldsymbol{q}-\boldsymbol{q_1}-\boldsymbol{q_2}} \boldsymbol{dq_1} \boldsymbol{dq_2} .$$

Для зручності розіб'ємо вираз F_2 на доданки меншого розіміру:

$$F_2 = F_{21} + F_{22} + F_{23},$$

$$F_{21} = F_{211} + F_{212},$$

$$F_{211} = -\frac{1}{2}\iint \frac{\omega_1\omega_2(\boldsymbol{k}_2, \boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}_1)}{k_2} cth(k_2H)\ B_{\boldsymbol{q_1}} B_{\boldsymbol{q_2}} B_{\boldsymbol{q}-\boldsymbol{q_1}-\boldsymbol{q_2}} \boldsymbol{dq_1} \boldsymbol{dq_2},$$

$$F_{212} = \frac{1}{2}\iint \frac{\omega_1\omega_2(\boldsymbol{k}_1, \boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}_1)(\boldsymbol{k}_2, \boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}_1)}{k_1k_2|\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}_1|} cth(k_1H)\, cth(k_2H)\, cth(|\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}_1|H) *$$

$$* B_{\boldsymbol{q_1}} B_{\boldsymbol{q_2}} B_{\boldsymbol{q}-\boldsymbol{q_1}-\boldsymbol{q_2}} \boldsymbol{dq_1} \boldsymbol{dq_2},$$

$$F_{22} = -\iint \frac{(\omega_1+\omega_2)\omega_2(\boldsymbol{k}_2,\boldsymbol{k}_1+\boldsymbol{k}_2)}{k_2}\, cth(k_2H)\;\; B_{\boldsymbol{q_1}}B_{\boldsymbol{q_2}}B_{\boldsymbol{q}-\boldsymbol{q_1}-\boldsymbol{q_2}}\boldsymbol{dq_1dq_2},$$

$$F_{23} = F_{231} + F_{232},$$

$$F_{231} = -\frac{1}{2}\iint \frac{(\omega-\omega_1-\omega_2)\omega_2(\boldsymbol{k}_2,\boldsymbol{k}_1+\boldsymbol{k}_2)}{k_2}\, cth(k_2H)\;\; B_{\boldsymbol{q_1}}B_{\boldsymbol{q_2}}B_{\boldsymbol{q}-\boldsymbol{q_1}-\boldsymbol{q_2}}\boldsymbol{dq_1dq_2},$$

$$F_{232} = -\frac{1}{2}\iint \frac{(\omega-\ \omega_1-\omega_2)\omega_2(\boldsymbol{k}_1+\boldsymbol{k}_2,\boldsymbol{k}-\ \boldsymbol{k}_1-\boldsymbol{k}_2)(\boldsymbol{k}_2,\boldsymbol{k}_1+\boldsymbol{k}_2)}{k_2}\, cth(k_2H) *$$

$$* cth(|\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}_1|H)cth(|\boldsymbol{k}_1+\boldsymbol{k}_2|H)B_{\boldsymbol{q_1}}B_{\boldsymbol{q_2}}B_{\boldsymbol{q}-\boldsymbol{q_1}-\boldsymbol{q_2}}\boldsymbol{dq_1dq_2}\ ,$$

$$F_2 = F_{211} + F_{212} + F_{22} + F_{231} + F_{232}\ .$$

Зведемо подібні в правій частині рівняння: `

$$\left[1-\frac{\omega^2}{k}cth(kH)\right]B_{\boldsymbol{q}} + C_{\boldsymbol{q}} = \alpha\int f_2(\boldsymbol{q},\boldsymbol{q}_1)B_{\boldsymbol{q_1}}B_{\boldsymbol{q}-\boldsymbol{q_1}}\boldsymbol{dq_1} +$$
$$+\ \alpha^2\iint f_3(\boldsymbol{q},\boldsymbol{q}_1,\boldsymbol{q}_2)B_{\boldsymbol{q_1}}B_{\boldsymbol{q_2}}B_{\boldsymbol{q}-\boldsymbol{q_1}-\boldsymbol{q_2}}\boldsymbol{dq_1dq_2}. \qquad (26)$$

$$f_3(\boldsymbol{q},\boldsymbol{q}_1,\boldsymbol{q}_2) = \frac{\omega}{k}cth(kH)\{\frac{\omega_2(\boldsymbol{k}_1+\boldsymbol{k}_2,\boldsymbol{k})(\boldsymbol{k}_1+\boldsymbol{k}_2,\boldsymbol{k}_2)}{|\boldsymbol{k}_1+\boldsymbol{k}_2|k_2}\, cth(|\boldsymbol{k}_1+\boldsymbol{k}_2|H)cth(k_2H) +$$

$$-\frac{1}{2}\omega_1[2(\boldsymbol{k_1},\boldsymbol{k_2})+k_1^2]\,\} \ +$$

$$-\frac{{\omega_1}^2{k_2}^2cth(k_1H)}{k_1} - \omega_1\omega_2\{\ k_1cth(k_1H)+\ k_2cth(k_2H) - \langle\boldsymbol{k}_1,\boldsymbol{k}_2\rangle[k_1cth(k_2H)+k_2cth(k_1H)]\,\}$$

$$+\frac{1}{2}\frac{\omega_1\omega_2(\boldsymbol{k}_1,\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}_1)(\boldsymbol{k}_2,\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}_1)}{k_1k_2|\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}_1|}\ cth(k_1H)\, cth(k_2H)\, cth(|\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}_1|H) +$$

$$-\frac{1}{2}\frac{\omega_1\omega_2(\boldsymbol{k}_2,\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}_1)}{k_2}\, cth(k_2H)\ + \frac{(\omega_1+\omega_2)\omega_2(\boldsymbol{k}_2,\boldsymbol{k}_1+\boldsymbol{k}_2)}{k_2}cth(k_2H) +$$

$$-\frac{1}{2}\,\frac{(\omega-\ \omega_1-\omega_2)\omega_2(\boldsymbol{k}_2,\boldsymbol{k}_1+\boldsymbol{k}_2)}{k_2}\, cth(k_2H) +$$

$$-\frac{1}{2}\,\frac{(\omega-\ \omega_1-\omega_2)\omega_2(\boldsymbol{k}_1+\boldsymbol{k}_2,\boldsymbol{k}-\ \boldsymbol{k}_1-\boldsymbol{k}_2)(\boldsymbol{k}_2,\boldsymbol{k}_1+\boldsymbol{k}_2)}{k_2}cth(k_2H)cth(|\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}_1|H)cth(|\boldsymbol{k}_1+\boldsymbol{k}_2|H).$$

Симетризуемо окремо кожний несиметричний доданок:

1) $\frac{\omega}{k}cth(kH)\{\frac{\omega_2(\boldsymbol{k}_1+\boldsymbol{k}_2,\boldsymbol{k})(\boldsymbol{k}_1+\boldsymbol{k}_2,\boldsymbol{k}_2)}{|\boldsymbol{k}_1+\boldsymbol{k}_2|k_2}\ cth(|\boldsymbol{k}_1+\boldsymbol{k}_2|H)cth(k_2H)-\frac{1}{2}\omega_1[2(\boldsymbol{k}_1,\boldsymbol{k}_2)+k_1^2]\}=$

$$\frac{\omega}{k}cth(kH)\{\frac{1}{2}\frac{(\boldsymbol{k}_1+\boldsymbol{k}_2,\mathbf{k})}{|\boldsymbol{k}_1+\boldsymbol{k}_2|}[\frac{\omega_2(\boldsymbol{k}_1+\boldsymbol{k}_2,\boldsymbol{k}_2)}{k_2}+\frac{\omega_1(\boldsymbol{k}_1+\boldsymbol{k}_2,\boldsymbol{k}_1)}{k_1}]+$$

$$-\frac{1}{4}[\omega_1[2(\boldsymbol{k}_1,\boldsymbol{k}_2)+k_1^2]+\omega_2[2(\boldsymbol{k}_1,\boldsymbol{k}_2)+k_2^2]]\},$$

2) $\quad -\frac{{\omega_1}^2{k_2}^2cth(k_1H)}{k_1}=-\frac{1}{4}[\frac{{\omega_1}^2{k_2}^2cth(k_1H)}{k_1}+\frac{{\omega_2}^2{k_1}^2cth(k_2H)}{k_2}],$

3) $\quad \frac{1}{2}\frac{\omega_1\omega_2(\boldsymbol{k}_1,\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}_1)(\boldsymbol{k}_2,\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}_1)}{k_1k_2|\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}_1|}\ cth(k_1H)\ cth(k_2H)\ cth(|\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}_1|H)=$

$$\frac{1}{4}\frac{\omega_1\omega_2(\boldsymbol{k}_1,\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}_1)(\boldsymbol{k}_2,\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}_1)}{k_1k_2}\ cth(k_1H)\ cth(k_2H)[\frac{cth(|\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}_1|H)}{|\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}_1|}+\frac{cth(|\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}_2|H)}{|\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}_2|}],$$

4) $\quad -\frac{1}{2}\frac{\omega_1\omega_2(\boldsymbol{k}_2,\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}_1)}{k_2}\ cth(k_2H)=-\frac{1}{4}\omega_1\omega_2\ [\frac{(\boldsymbol{k}_2,\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}_1)}{k_2}cth(k_2H)+\frac{(\boldsymbol{k}_1,\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}_2)}{k_1}cth(k_1H)],$

5) $\frac{(\omega_1+\omega_2)\omega_2(\boldsymbol{k}_2,\boldsymbol{k}_1+\boldsymbol{k}_2)}{k_2}cth(k_2H)=\frac{1}{2}(\omega_1+\omega_2)[\frac{\omega_2(\boldsymbol{k}_2,\boldsymbol{k}_1+\boldsymbol{k}_2)}{k_2}cth(k_2H)+\frac{\omega_1(\boldsymbol{k}_1,\boldsymbol{k}_1+\boldsymbol{k}_2)}{k_1}cth(k_1H)],$

6) $\quad -\frac{1}{2}\frac{(\omega-\omega_1-\omega_2)\omega_2(\boldsymbol{k}_2,\boldsymbol{k}_1+\boldsymbol{k}_2)}{k_2}\ cth(k_2H)=-\frac{1}{4}(\omega-\ \omega_1-\omega_2)[\frac{\omega_2(\boldsymbol{k}_2,\boldsymbol{k}_1+\boldsymbol{k}_2)}{k_2}\ cth(k_2H)+$

$$\frac{\omega_1(\boldsymbol{k}_1,\boldsymbol{k}_1+\boldsymbol{k}_2)}{k_1}\ cth(k_1H)]$$

7) $-\frac{1}{2}\frac{(\omega-\omega_1-\omega_2)\omega_2(\boldsymbol{k}_1+\boldsymbol{k}_2,\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}_1-\boldsymbol{k}_2)(\boldsymbol{k}_2,\boldsymbol{k}_1+\boldsymbol{k}_2)}{k_2}cth(k_2H)cth(|\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}_1|H)cth(|\boldsymbol{k}_1+\boldsymbol{k}_2|H)=$

$$-\frac{1}{4}(\omega-\ \omega_1-\omega_2)(\boldsymbol{k}_1+\boldsymbol{k}_2,\boldsymbol{k}-\ \boldsymbol{k}_1-\boldsymbol{k}_2)cth(|\boldsymbol{k}_1+\boldsymbol{k}_2|H)[\omega_2\frac{(\boldsymbol{k}_2,\boldsymbol{k}_1+\boldsymbol{k}_2)}{k_2}cth(k_2H)cth(|\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}_1|H)+$$

$$\omega_1\frac{(\boldsymbol{k}_1,\boldsymbol{k}_1+\boldsymbol{k}_2)}{k_1}cth(k_1H)cth(|\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}_2|H)]\ .$$

Отже остаточно симметризоване $f_3(\boldsymbol{q},\boldsymbol{q}_1,\boldsymbol{q}_2)$ має наступний вигляд:

$$f_3(\boldsymbol{q},\boldsymbol{q}_1,\boldsymbol{q}_2)=\frac{\omega}{k}cth(kH)\{\frac{1}{2}\frac{(\boldsymbol{k}_1+\boldsymbol{k}_2,\boldsymbol{k})}{|\boldsymbol{k}_1+\boldsymbol{k}_2|}[\frac{\omega_2(\boldsymbol{k}_1+\boldsymbol{k}_2,\boldsymbol{k}_2)}{k_2}+\frac{\omega_1(\boldsymbol{k}_1+\boldsymbol{k}_2,\boldsymbol{k}_1)}{k_1}]+$$

$$-\frac{1}{4}[\omega_1[2(\boldsymbol{k}_1,\boldsymbol{k}_2)+k_1^2]+\omega_2[2(\boldsymbol{k}_1,\boldsymbol{k}_2)+k_2^2]]\}-\frac{1}{4}[\frac{{\omega_1}^2{k_2}^2cth(k_1H)}{k_1}+\frac{{\omega_2}^2{k_1}^2cth(k_2H)}{k_2}]$$

$$-\omega_1\omega_2\{\ k_1cth(k_1H)+\ k_2cth(k_2H)-\langle\boldsymbol{k}_1,\boldsymbol{k}_2\rangle[k_1cth(k_2H)+k_2cth(k_1H)]\}\ +$$

$$\frac{1}{4}\frac{\omega_1\omega_2(\boldsymbol{k}_1,\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}_1)(\boldsymbol{k}_2,\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}_1)}{k_1k_2}\ cth(k_1H)\ cth(k_2H)[\frac{cth(|\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}_1|H)}{|\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}_1|}+\frac{cth(|\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}_2|H)}{|\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}_2|}]+$$

$$-\frac{1}{4}\omega_1\omega_2\,[\frac{(\boldsymbol{k}_2,\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}_1)}{k_2}cth(k_2H)+\frac{(\boldsymbol{k}_1,\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}_2)}{k_1}cth(k_1H)]+$$

$$\frac{1}{2}(\omega_1+\omega_2)[\frac{\omega_2(\boldsymbol{k}_2,\boldsymbol{k}_1+\boldsymbol{k}_2)}{k_2}cth(k_2H)+\frac{\omega_1(\boldsymbol{k}_1,\boldsymbol{k}_1+\boldsymbol{k}_2)}{k_1}cth(k_1H)]+$$

$$-\frac{1}{4}(\omega-\omega_1-\omega_2)[\frac{\omega_2(\boldsymbol{k}_2,\boldsymbol{k}_1+\boldsymbol{k}_2)}{k_2}\ cth(k_2H)+\frac{\omega_1(\boldsymbol{k}_1,\boldsymbol{k}_1+\boldsymbol{k}_2)}{k_1}\ cth(k_1H)]+$$

$$-\frac{1}{4}\ (\omega-\omega_1-\omega_2)(\boldsymbol{k}_1+\boldsymbol{k}_2,\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}_1-\boldsymbol{k}_2)cth(|\boldsymbol{k}_1+\boldsymbol{k}_2|H)[\omega_2\frac{(\boldsymbol{k}_2,\boldsymbol{k}_1+\boldsymbol{k}_2)}{k_2}cth(k_2H)cth(|\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}_1|H)+$$

$$\omega_1\frac{(\boldsymbol{k}_1,\boldsymbol{k}_1+\boldsymbol{k}_2)}{k_1}cth(k_1H)cth(|\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}_2|H)].$$

Функція f_3 має властвість:

$$f_3(\boldsymbol{q},\boldsymbol{q}_1,\boldsymbol{q}_2)\ =\ f_3(\boldsymbol{q},\boldsymbol{q}_2,\boldsymbol{q}_1)$$

Висновки. Представлено поле відхилень та потенціали швидкостей у вигляді інтегралів Фур'є-Стілтьєса. Отримано динамічне рівняння в інтегральній формі для стохастичної амплітуди поля відхилень через розклад у ряд за малим параметром. Для підінтегральних функцій трихвильової взаємодії проведена процедура симетризації.

Список літератури

1. Полников В. Г. Нелинейная теория случайного поля волн на воде / В. Г. Полников., 2007.
2. Masuda A. On the dispersion relation of random gravity waves / A. Masuda, Y. Kuo, H. Mitsuyasu. // Fluid Mech. – 1979. – №92. – С. 717–730.
3. Чалий С.О. Виведення першого наближення динамічного рівняння для стаціонарних нелінійних поверхневих хвиль в рідині зі скінченною глибиною / *Сучасні проблеми природничих і точних наук* : матеріали VI Всеукраїнської онлайн-конференції молодих науковців (м.Ніжин, 14 квіт. 2021р.). Ніжин, 2021. С. 64-65.