

УДК: 532.59

РЕЗОНАНС ДРУГОЇ ГАРМОНІКИ В ТРИШАРОВІЙ РІДИНІ

В. В. Наратовий, Д. С. Харченко

Науковий керівник: кандидат тех. наук, доцент Наратовий Володимир

*Центральноукраїнський державний педагогічний університет імені
Володимира Винниченка, м. Кропивницький, Україна*

Анотація. У статті досліджується поширення хвильових пакетів у тришаровій гідродинамічній системі «шар з твердим дном – шар – шар з кришкою». Для нижньої та верхньої поверхонь контакту отримані рівняння, якими визначається форма хвильових пакетів на відповідних поверхнях контакту. Досліджено явище резонансу других гармонік, отримано графіки областей резонансу.

Ключові слова: хвильові пакети, резонанс, поверхні контакту.

Resonance of the second harmonic in three-layer liquid

V.V. Naradovyi, D.S. Kharchenko

Scientific supervisor: Candidate of Technical Science, Associate Professor

Naradovyi Vladimir

*Volodymyr Vynnychenko Ukrainian State Pedagogical University,
Kropyvnytsky, Ukraine*

Abstract. The article investigates the propagation of wave packets in a three - layer hydrodynamic system "layer with a hard bottom - layer - layer with a cover". For the lower and upper contact surfaces, the equations are obtained, which determine the shape of the wave packets on the respective contact surfaces. The phenomenon of resonance of the second harmonics are investigated, graphs of resonance regions are obtained.

Keywords: wave packets, resonance, contact surfaces.

Постановка проблеми

Теоретичні та практичні дослідження поведінки хвильових пакетів у стратифікованих рідинах викликають значний практичний інтерес і є основою багатьох сучасних досліджень гідродинаміки та ряду наук, що вивчають хвильові процеси в рідинах та природних водах.

Таким чином актуальною є проблема дослідження хвильових процесів у тришаровій гідродинамічній системі «шар з твердим дном – шар – шар з кришкою».

Аналіз досліджень і публікацій.

У роботі [1] вивчається хвильовий рух у двошаровій гідродинамічній системі «шар з твердим дном–шар із вільною поверхнею». Досліджується залежність енергій руху внутрішніх і поверхневих хвиль від геометричних і фізичних параметрів системи, оцінено внесок другого наближення. Результати ілюстровані графічно.

У статтях [2,5] досліджується слабонелінійна задача поширення внутрішніх хвильових пакетів у системі «шар з кришкою–шар–півпростір». Побудовано перші три лінійні задачі для масштабних компонент потенціалів швидкостей і відхилень контактних поверхонь. Отримано умови поширення хвилі в першому наближенні для різних співвідношень густин у гідродинамічній системі, виконаний аналіз залежності можливих частот від товщини верхнього шару та хвильового числа. Досліджено вплив наявності поверхневого натягу на поверхні контакту.

Також досліджується форма хвильових пакетів. Проаналізовано графіки форми відхилення нижньої і верхньої поверхонь контакту.

У статті [3] вивчається явище резонансної взаємодії, внаслідок якої виникають хвилі-вбивці, що моделюються як спеціальні бризери (пульсуючі моди). Цей сценарій досліджується для внутрішніх хвиль у стратифікованій за густиною рідині. Досліджується полярність, амплітуда та стійкість цих хвиль. Показано, що такі хвилі критично залежать від конкретної стратифікації густини та вибору мод. Крім того, немає обмежень на ознаки нелінійності та дисперсії, а також немає вимог до глибини рідини.

У статті [4] розглядається модуляційно-резонансний механізм для поверхневих хвиль у двошаровій рідинній системі. Результати моделі чисельно показують, що в умовах сильної нелінійності поверхневі хвилі з її типовим хвильовим числом, що є резонансним, можуть генеруватися локально на передньому краї нижнього, повільно мінливого довгохвильового бароклинного потоку.

Мета статті. Дослідження явища резонансу для других гармонік у гідродинамічній системі «шар з твердим дном – шар – шар з кришкою».

Виклад основного матеріалу дослідження.

Задача поширення хвильових пакетів у тришаровій гідродинамічній системі «шар з твердим дном – шар – шар з кришкою» описується наступною системою рівнянь:

$$\varphi_{j,xx} + \varphi_{j,zz} = 0 \text{ у } \Omega_j, \quad j = 1, 2, 3 \quad (1)$$

$$\eta_{1,t} - \varphi_{j,z} = -\varphi_{j,x} \eta_{1,x} \text{ при } z = \eta_1(x, t), \quad j = 1, 2 \quad (2)$$

$$\eta_{2,t} - \varphi_{j,z} = -\varphi_{j,x} \eta_{2,x} \text{ при } z = h_2 + \eta_2(x, t), \quad j = 2, 3 \quad (3)$$

$$\rho_1 \varphi_{1,t} - \rho_2 \varphi_{2,t} + g(\rho_1 - \rho_2) \eta_1 + 0.5 \rho_1 (\nabla \varphi_1)^2 - 0.5 \rho_2 (\nabla \varphi_2)^2 - T_1 \left(1 + (\eta_{1,x})^2 \right)^{-3/2} \eta_{1,xx} = 0$$

при $z = \eta_1(x, t)$ (4)

$$\rho_2 \varphi_{2,t} - \rho_3 \varphi_{3,t} + g(\rho_2 - \rho_3) \eta_2 + 0.5 \rho_2 (\nabla \varphi_2)^2 - 0.5 \rho_3 (\nabla \varphi_3)^2 - T_2 \left(1 + (\eta_{2,x})^2 \right)^{-3/2} \eta_{2,xx} = 0$$

при $z = h_2 + \eta_2(x, t)$ (5)

$$\varphi_{1,z} = 0 \text{ при } z = -h_1, \quad (6)$$

$$\varphi_{3,z} = 0 \text{ при } z = h_2 + h_3, \quad (7)$$

Де нижній, середній та верхній шари $\Omega_1 = \{(x, z) : |x| < \infty, -h_1 \leq z \leq 0\}$, $\Omega_2 = \{(x, z) : |x| < \infty, 0 \leq z \leq h_2\}$, $\Omega_3 = \{(x, z) : |x| < \infty, h_2 \leq z \leq h_2 + h_3\}$, густини яких відповідно дорівнюють ρ_1 , ρ_2 та ρ_3 , розділені поверхнями контакту $z = \eta_1(x, t)$ та $z = \eta_2(x, t)$. Нижній шар системи обмежений твердим дном, верхній шар обмежений кришкою. Сила тяжіння направлена у від'ємному z -напрямку перпендикулярно до поверхні розподілу.

Тут φ_j ($j=1,2,3$) - потенціали швидкості частинок в Ω_j , η_1, η_2 - відхилення поверхонь контакту, T_1, T_2 - коефіцієнти поверхневого натягу на поверхнях контакту, g - прискорення вільного падіння.

Метод багатомасштабних розвинень використовувався для розв'язку задачі. Функції відхилення поверхонь контакту та потенціали швидкостей були представлені у вигляді:

$$\eta_j(x, t) = \sum_{n=1}^3 \alpha^{n-1} \eta_{jn}(x_0, x_1, x_2, t_0, t_1, t_2) + O(\alpha^3), j=1,2 \quad (8)$$

$$\varphi_j(x, t, z) = \sum_{n=1}^3 \alpha^{n-1} \varphi_{jn}(x_0, x_1, x_2, z, t_0, t_1, t_2) + O(\alpha^3), j=1,2,3 \quad (9)$$

Розв'язки перших двох наближень, дисперсійне рівняння та дві пари коренів наведені у роботі [6].

Рівняння, якими визначається форма хвильового пакету на нижній та верхній поверхнях контакту, мають вигляд:

$$\eta_1(x, t) = 2a \cos(kx - \omega t) + \alpha a^2 \left[2B^* + 2\Lambda_1 \cos(2(kx - \omega t)) \right], \quad (10)$$

$$\eta_2(x, t) = 2K_5 a \cos(kx - \omega t) + \alpha a^2 \left[2C^* + 2\Lambda_2 \cos(2(kx - \omega t)) \right]$$

Де $\Lambda_1(\rho_2, \rho_3, T_1, T_2, k, h_1, h_2, h_3) = \frac{L_1}{L_2}$ та $\Lambda_2(\rho_2, \rho_3, T_1, T_2, k, h_1, h_2, h_3) = \frac{M_1}{M_2}$.

В околах $L_2 = 0$ та $M_2 = 0$ виникає резонанс других гармонік, тобто амплітуди других гармонік нижньої та верхньої поверхонь контакту η_{12} та η_{22} зростають порівняно з відповідними амплітудами η_{11} та η_{21} .

На рис. 1 у системі (ρ_2, k) для нижньої поверхні контакту продемонстровані графіки $L_2 = 0$ для першої пари коренів ω_1 для таких значень товщини нижнього, середнього та верхнього шарів: $h_1 = 0, h_2 = 0, h_3 = 0$. Околиці кривої $L_2 = 0$ в яких значення величини Λ_1 більші за задані значення позначені $|\Lambda_1| > 1$ та $|\Lambda_1| > 5$.

На рис. 2 зображено графіки, в яких значення величини Λ_1 більші за задані значення позначені $|\Lambda_1| > 1$ та $|\Lambda_1| > 5$ для другої пари коренів ω_2 .

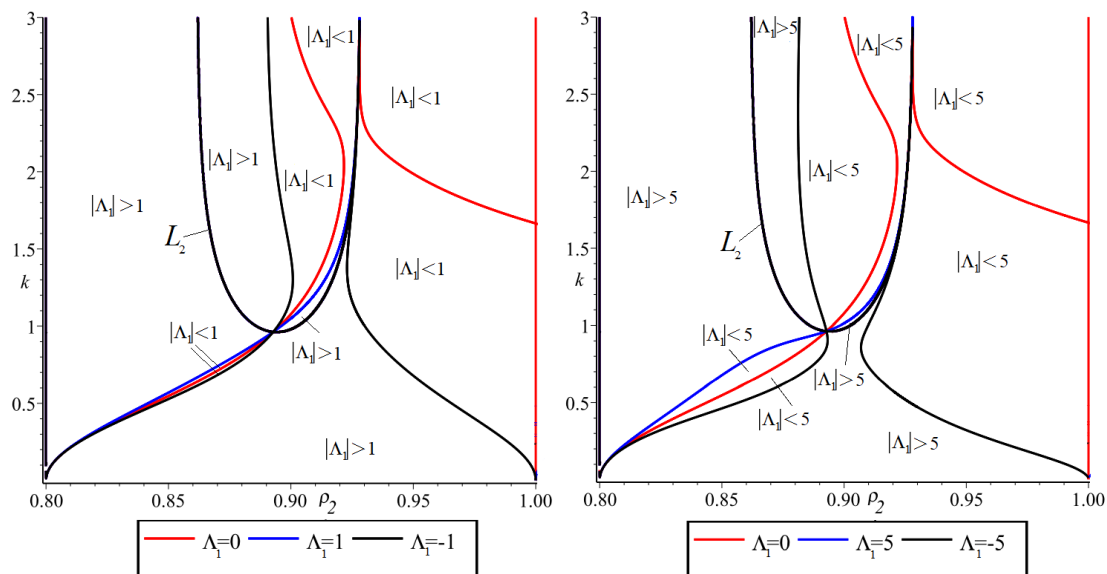


Рис. 1. Области резонансу для ω_1 у системі (ρ_2, k) .

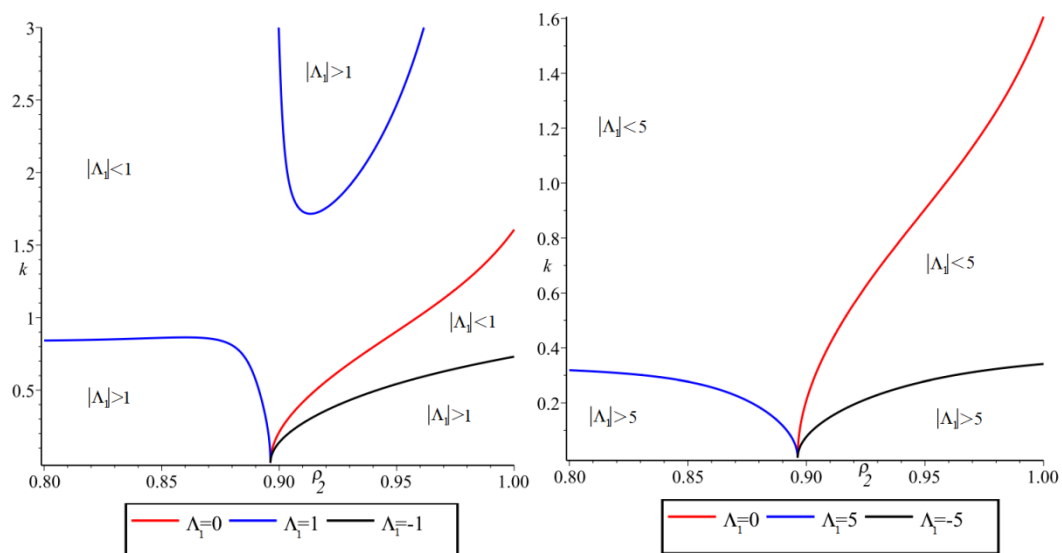


Рис. 2. Области резонансу для ω_1 у системі (ρ_2, k) .

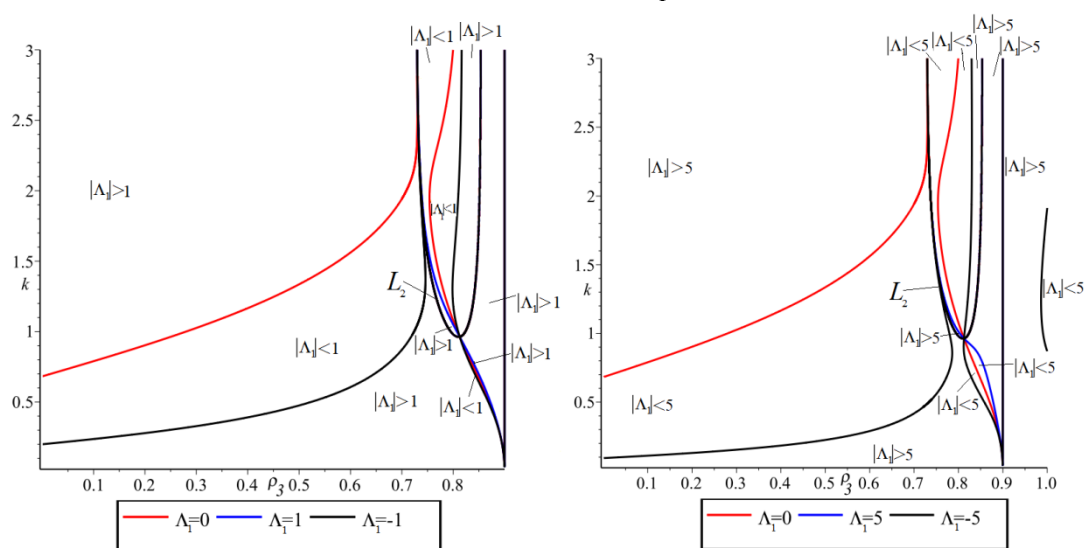


Рис. 3. Области резонансу для ω_1 у системі (ρ_3, k) .

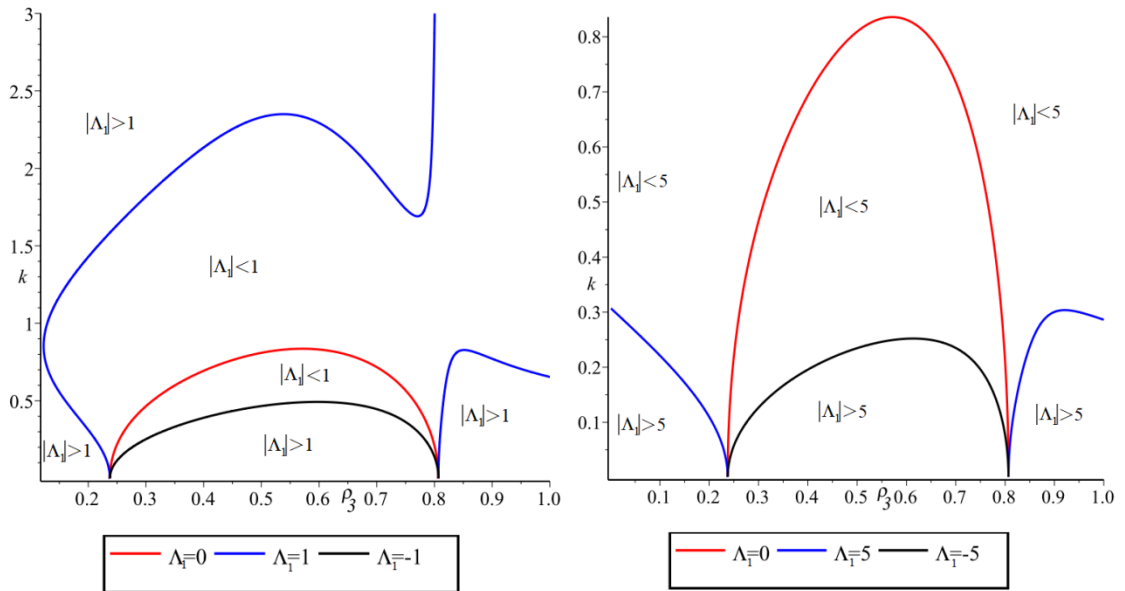


Рис. 4. Области резонансу для ω_2 у системі (ρ_3, k) .

На рис. 3 та рис. 4 представлені графіки $L_2 = 0$ для першої та другої пари коренів відповідно у системі (ρ_3, k) . Значення товщини шарів та величини Λ_1 повторюються.

На рис. 5 для верхньої поверхні контакту у системі (ρ_2, k) продемонстровані графіки $M_2 = 0$ для першої пари коренів ω_1 . Околиці кривої $M_2 = 0$ в яких значення величини Λ_2 більші за задані значення позначені $|\Lambda_2| > 1$ та $|\Lambda_2| > 5$.

На рис. 6 наведені графіки для другої пари коренів ω_2 . На рис. 7 та рис. 8 наведені графіки резонансу у системі (ρ_3, k) .

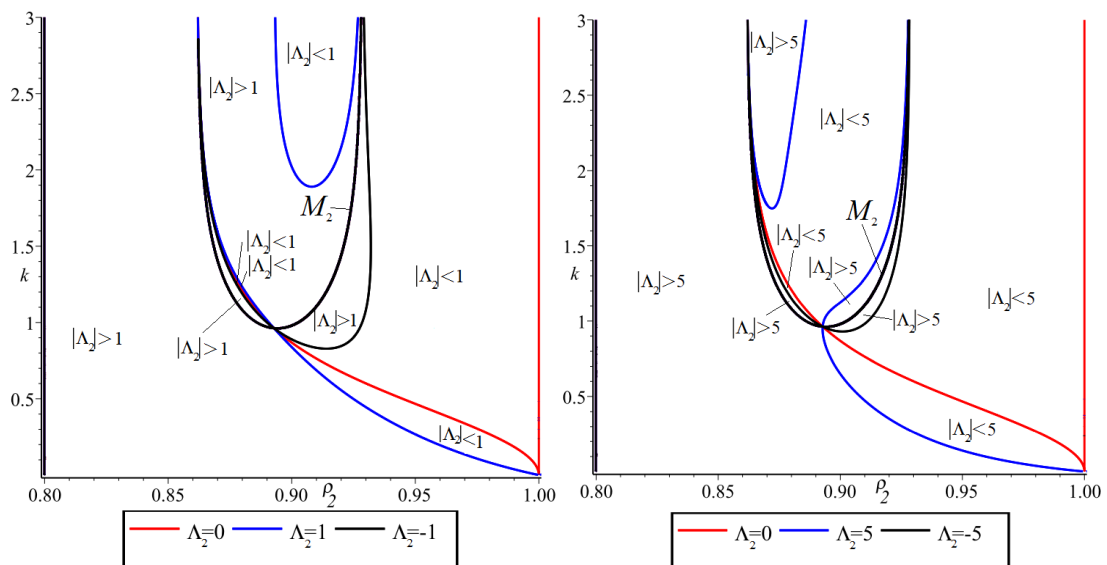


Рис. 5. Области резонансу для ω_1 у системі (ρ_2, k) .

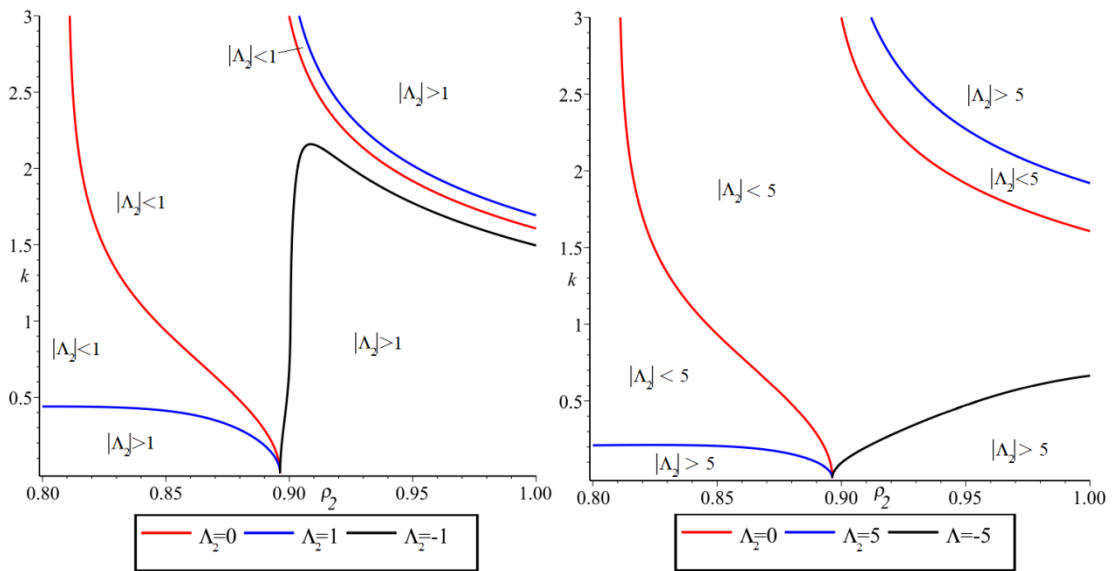


Рис. 6. Области резонансу для ω_2 у системі (ρ_2, k) .

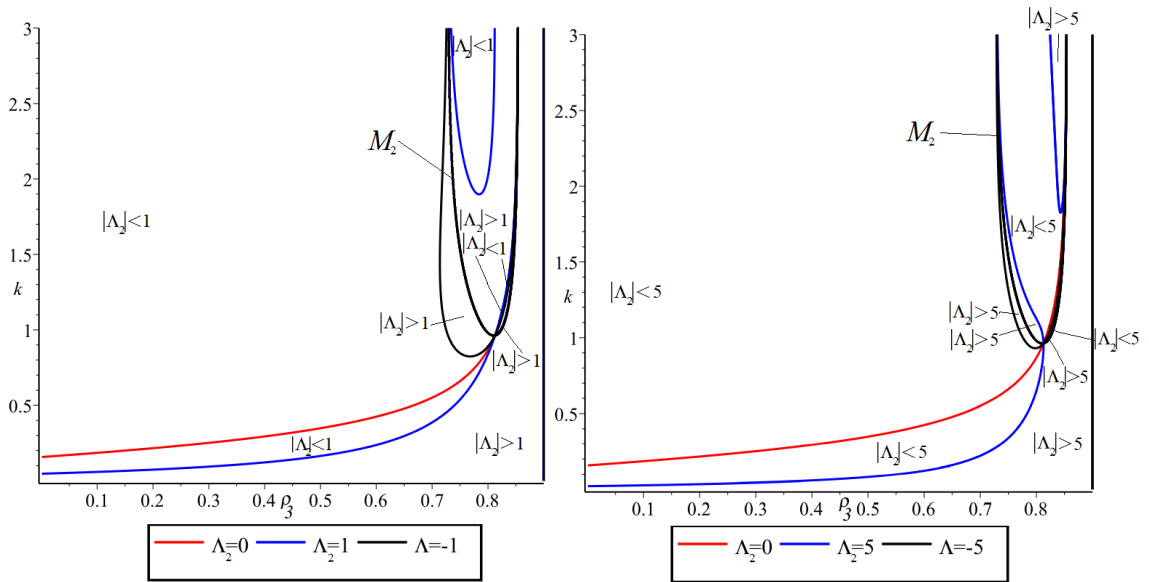


Рис. 7. Области резонансу для ω_1 у системі (ρ_3, k) .

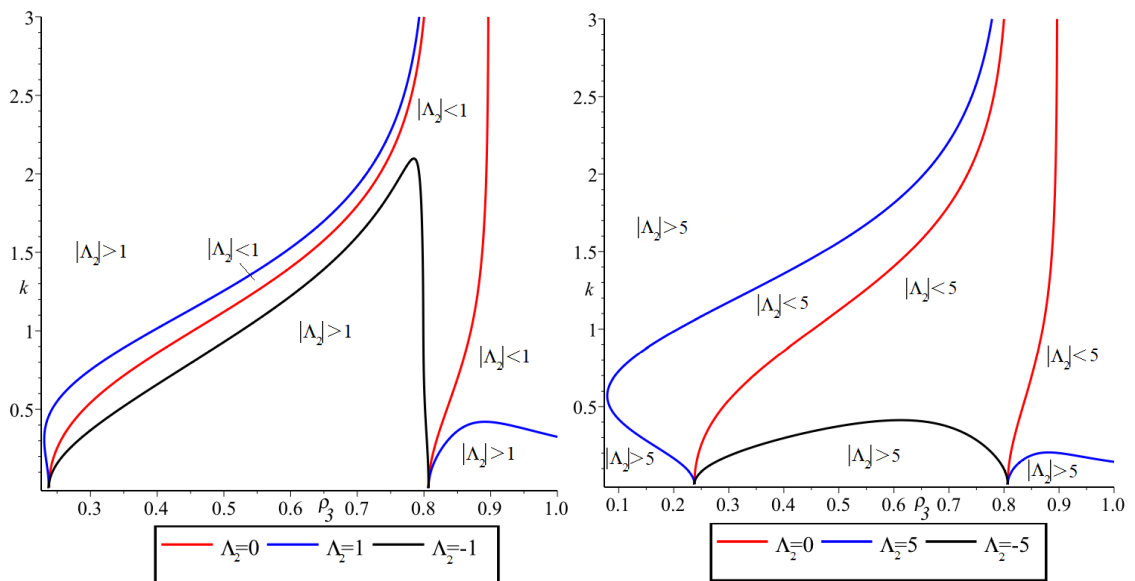


Рис. 8. Области резонансу для ω_2 у системі (ρ_3, k) .

Висновки та перспективи подальших пошуків у напрямі дослідження.

Досліджено задачу поширення хвильових пакетів у тришаровій гідродинамічній системі «шар з твердим дном – шар – шар з кришкою». Також досліджено явище резонансу других гармонік, отримано графіки областей резонансу для обох пар коренів у системах (ρ_2, k) та (ρ_3, k) .

Список використаної джерел

1. Avramenko O.V., Naradovyi V.V., Selezov I.T. Energy of motion of internal and surface waves in a two-layer hydrodynamic system// Journal of Mathematical Sciences. – 2018. – 229(3). – P. 241-252.
2. Avramenko O.V., Naradovyi V.V., Lunyova M.V., Selezov I.T. Conditions of Wave Propagation in a Semiinfinite Three-Layer Hydrodynamic System with Rigid Lid// J. Math. Sci. – 2020. – 247(1). – P. 173-190.
3. Chan H.N., Chow K.W., Grimshaw R.H.J. Modeling internal rogue waves in a long wave-short wave resonance framework// Physical review fluids. – 2018. – 3(12). – № 124801.
4. Jiang S.X.W., Kovacic G., Zhou D., Cai D. Modulation-resonance mechanism for surface waves in a two-layer fluid system// Journal of fluid mechanics. – 2019. – 875. – P. 807-841.
5. Авраменко О.В., Луньова М.В. Аналіз форми хвильових пакетів у тришаровій гідродинамічній системі «півпростір–шар–шар з твердою кришкою»// Математичні методи та фізико-механічні поля. – 2020. – 62(3). – P. 127-142.
6. Харченко Д.С. Форма хвильових пакетів у тришаровій гідродинамічній системі// Математика, прикладна математика і механіка. – 2021. – 94. – P. 77-90.