УДК 372/851

ВИВЧЕННЯ ОЗНАК ЗБІЖНОСТІ РЯДІВ ЗА ДОПОМОГОЮ МНОЖНИКІВ ЗБІЖНОСТІ

Гаран Ірина

Науковий керівник: канд.ф.-м. наук, доцент Кузьмич В.І.

Херсонський державний університет, м. Херсон, Україна

У роботі пропонується залучити до вивчення ознак збіжності числових рядів у курсі математичного аналізу поняття множників збіжності. Такий підхід дає можливість розглядати класичні ознаки збіжності рядів з однієї точки зору та отримувати нові ознаки, адаптовані до конкретних класів числових рядів. Для ознайомлення з методом множників збіжності достатньо володіти основними поняттями теорії рядів, і тому його можна використати на завершальному етапі вивчення понять збіжності, абсолютної збіжності та обмеженості числових рядів. Вивчення методу множників збіжності сприяє формуванню професійної компетентності майбутніх вчителів математики в закладах вищої освіти.

Ключові слова: ряд, послідовність, збіжність, ознаки збіжності, множники збіжності.

STUDY OF SIGNS THE CONVERGENCE OF SERIES BY MEANS OF CONVERGENCE MULTIPLIERS

I. Haran

Scientific supervisor: Candidate of Physics and Mathematics Sciences, Assistant professor Kuzmich V.I.

Kherson State University, Kherson, Ukraine

The paper proposes to involve the notion of convergence multipliers into the study of signs of convergence of numerical series in the mathematical analysis. This approach allows to consider the classical signs of convergence of series from one point of view and to obtain new signs adapted to specific classes of numerical series. To know the method of convergence multipliers it is sufficient to know the basic concepts of the theory of series and therefore it can be used at the final stage of the study of convergence, absolute convergence and boundedness of numerical series. The study of the method of convergence multipliers contributes to the professional competence of future teachers of mathematics in higher education institutions.

Key words: series, sequence, convergence, signs of convergence, multipliers of convergence.

Постановка проблеми. Сучасний ринок праці вимагає переосмислення поглядів на новий стандарт педагога. Вчитель нового покоління – це людина, яка здатна пристосовуватися до викликів часу. Саме тому в процесі формування професійних компетентностей майбутнього вчителя математики в закладах вищої освіти важливим є застосування нових методів подання теоретичного та практичного матеріалів, осучаснення інформаційного наповнення освітнього процесу.

Однією із базових освітніх компонент професійного циклу підготовки майбутнього вчителя математики є дисципліна «Математичний аналіз». Вивчення цієї дисципліни закладає базову основу для формування наукового світогляду в здобувачів вищої освіти, сприяє розвитку математичного мислення, розуміння наукових ідей та методів математики.

Значною проблемою в підготовці майбутнього вчителя математики є незмінність навчального матеріалу освітньої дисципліни «Математичний аналіз». На наш погляд, є можливим оновлення змістовного наповнення деяких тем. Так під час вивчення рядів та послідовностей, вважаємо за доцільне, ознайомити здобувачів вищої освіти не тільки з класичними ознаками збіжності, але й показати як дані ознаки можна виводити за допомогою множників збіжності.

Аналіз досліджень і публікацій. Аналіз наукової та науково-методичної літератури показав, що вивченням множників збіжності рядів і послідовностей та дослідженням їхнього застосування до виведення ознак збіжності займалися такі визначні математики: Н. Абель (1802-1829), Р. Дедекінд (1831-1916), Ж. Адамар (1865-1963), Е. Чезаро (1859-1906), Г. Харді (1877-1947), Х. Бор (1887-1951), І. Шур (1876-1941) та інші.

У наш час активно проводяться дослідження множників збіжності для ортогональних функціональних рядів. Зокрема, вивчались множники Вейля кратних рядів Фур'є [2], множники безумовної збіжності ортогональних рядів [4], точні множники Вейля [3], а також множники абсолютної збіжності [6].

Метою даної роботи є розгляд альтернативних підходів до вивчення ознак збіжності числових рядів та послідовностей в курсі обов'язкової освітньої компоненти «Математичний аналіз», а саме, застосування множників збіжності при вивченні ознак збіжності рядів.

Виклад основного матеріалу. Вважаємо за доцільне, для початку, уточнити категоріальний апарат проблеми дослідження [5, 257-258].

Розглянемо деяку нескінченну послідовність чисел $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$

Означення 1. Числовий ряд – це вираз виду

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad (1)$$

де $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ *– дійсні або комплексні числа, які називають членами ряду,* a_n *– загальний або* n*-й член ряду.*

Означення 2. Число $A_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ $(n = 1,2, \dots)$ *називають -ю частинною (або частковою) сумою ряду (1), а послідовність* $\{A_n\}$ *– послідовністю частинних сум цього ряду.*

Означення 3. Скінчену або нескінчену границю A *послідовності* $\{A_n\}$ *частинних сум ряду (1):*

$$A = \lim_{n\to\infty} A_n$$

називають сумою ряду (1) і записують:

$$A = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Якщо ряд має скінчену суму, то його називають збіжним, в іншому випадку (тобто, якщо сума дорівнює $\pm\infty$, або суми взагалі немає) – розбіжним.

Числові ряди у курсі математичного аналізу досліджують на збіжність та абсолютну збіжність за допомогою класичних ознак збіжності: ознак порівняння, граничної ознаки, радикальної ознаки Коші, ознаки Д’Аламбера, ознаки Лейбніца, ознаки Куммера, ознаки Раабе, ознаки Гаусса, ознаки Бертрана, інтегральної ознаки Маклорена-Коші. Різноманітність ознак збіжності продиктована необхідністю досліджувати різні класи рядів. Особливість структури ряду (його загального члена), визначає ознаку, за допомогою якої проводять дослідження даного ряду. Як правило, усі класичні ознаки збіжності рядів базуються на ознаці порівняння досліджуваного ряду з конкретними числовими рядами, збіжність або розбіжність яких вже встановлено (ряд геометричної прогресії, гармонійний ряд, ряд Діріхле і таке інше). Однак, отримання ознак збіжності числових рядів можна розглядати, до певної міри, з узагальненої точки зору. Для цього розглянемо поняття множників збіжності числового ряду [1, 167].

Ідея одержання ознак збіжності рядів за допомогою множників збіжності полягає в тому, що члениu_n досліджуваного ряду (1) представляють у вигляді добутку: $a_n = \varepsilon_n u_n$, де $\{\varepsilon_n\}$ – деяка числова послідовність, тобто, замість ряду (1) розглядають ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n u_n. \tag{2}$$

Якщо поведінка ряду $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ відома, то збіжність ряду (2), а отже і ряду (1), залежить лише від послідовності $\{\varepsilon_n\}$. У випадку збіжності ряду (2) числа ε_n називаються множниками збіжності ряду (1).

Однією з перших ознак, яку можна віднести до теорії множників збіжності, є ознака Абеля [5, 307], яка вказує, що коли ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ збігається, а послідовність $\{\varepsilon_n\}$ є монотонною $(\varepsilon_n > \varepsilon_{n+1}, \text{або}\ \varepsilon_n < \varepsilon_{n+1},\quad \text{для}\quad n = 1,2,\ldots)$ і обмеженою (існує додатне число M, для якого виконуються нерівності: $|\varepsilon_n| \leq M$ для $n = 1,2,\ldots$), то ряд (2) збігається.

Прикладом використання методу множників збіжності може слугувати, також, класична ознака Лейбніца збіжності знакозмінного числового ряду:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n (-1)^n,$$

де ε_n $(n = 1,2,\ldots)$ – додатні числа. Ця ознака вказує, що такий ряд є збіжним, якщо послідовність $\{\varepsilon_n\}$ монотонно спадає, і прямує до нуля $(\lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0)$ коли n прямує до нескінченості $(n \to \infty)$. Отже, такі числа ε_n $(n = 1,2,\ldots)$, для даного ряду, є множниками збіжності.

З іншого боку, ознака Лейбніца є частинним випадком ознаки Діріхле, яка вказує, що ряд (2) збігається, якщо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ є обмеженим (послідовність $\{U_n\}$ його частинних сум є обмеженою), а послідовність $\{\varepsilon_n\}$ монотонно спадає, і прямує до нуля [5, 307].

Під час знаходження множників збіжності доцільно користуватися наступною теоремою Дедекінда-Адамара.

Теорема. а) Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n u_n$ *збігається при будь-якому збіжному ряді* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *тоді і лише тоді, коли збігається ряд:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_n|. \tag{3}$$

б) Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n u_n$ *збігається при будь-якому обмеженому ряді* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *тоді і лише тоді, коли збігається ряд (3) і виконується умова:* $lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$ [1, 168].

Висновки та перспективи подальших пошуків. Забезпечення якісної підготовки майбутніх вчителів математики реалізується через осучаснення інформаційного наповнення освітніх дисциплін. Використання нового підходу до вивчення ознак збіжності рядів та послідовностей через застосування множників збіжності в курсі обов'язкової освітньої компоненти «Математичний аналіз», сприяє формуванню професійної компетентності майбутніх вчителів математики в закладах вищої освіти.

Перспективним напрямом подальших досліджень є поширення вказаних результатів на випадок множників підсумовування числових рядів, а також модернізація змістового наповнення теоретичного та практичного матеріалів розділу «Числові ряди» у курсі дисципліни «Математичний аналіз».

Список літератури

1. Барон С.А. Введение в теорию суммируемости рядов / С.А. Барон. Таллин: Валгус, 1977. – 280 с.
2. Никишин Е.М. Множители Вейля для кратных рядов Фурье / Е.М. Никишин. *Матем. сб.*, 1972, том 89(131), № 2(10). С. 340-348.
3. Полещук С.Н. О точных множителях Вейля / С.Н. Полещук. *Матем. сб.*, 1979, том 108. С. 105-114.
4. Ульянов П.Л. О множителях Вейля для безусловной сходимости ортогональных рядов / П.Л. Ульянов. *Докл. АН СССР*, 1977, том 235. С. 1038-1041.
5. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления, том II / Г.М. Фихтенгольц. М.: Наука, 1970. – 800 с.
6. Цагарейшвили В.Ш., Тутберидзе Г. Множители абсолютной сходимости / В.Ш. Цагарейшвили, Г. Тутберидзе. *Матем. заметки*, 2019, том 105, вып. 3. С. 433-443.