

УДК 532.5

**ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ ПРО ПОШИРЕННЯ  
СТОХАСТИЧНИХ ХВИЛЬ В ДВОШАРОВІЙ  
ГІДРОДИНАМІЧНІЙ СИСТЕМІ**

**Володимир Нарadowий, Володимир Довгенко**

**Науковий керівник: канд. тех. наук, доцент Нарadowий В.В.**  
*Центральноукраїнський державний педагогічний університет імені  
Володимира Винниченка, м. Кропивницький, Україна*

*В статті виконано постановку нової нелінійної задачі про поширення внутрішніх та поверхневих стохастичних хвиль в двошаровій гідродинамічній системі «шар з твердим дном – шар з вільною поверхнею». Виконано обезрозмірювання математичної постановки задачі. Для дослідження використано метод стохастичних амплітуд. На основі граничних умов виведено загальний вигляд для потенціалів та поверхонь відхилення у вигляді інтегралів Фур'є – Стілт'єса.*

*Ключові слова: стохастичні хвилі в рідині, метод стохастичних амплітуд.*

**STATEMENT OF THE PROBLEM ON THE  
PROPAGATION OF STOCHASTIC WAVES IN A TWO-LAYER  
HYDRODYNAMIC SYSTEM**

**Volodymyr Naradovyi, Volodymyr Dovhenko**

**Scientific supervisor: Doctor of PhD, Docent Naradovyi V.V.**  
*Volodymyr Vynnychenko Central Ukrainian State Pedagogical University,  
Kropyvnytsky, Ukraine*

*The article presents a new nonlinear problem on the propagation of internal and surface stochastic waves in a two-layer hydrodynamic system "layer with a hard bottom - a layer with a free surface". The dimensionlessness of the mathematical formulation of the problem is performed. The method of stochastic amplitudes was used for the research. Based on the boundary conditions, the general form for the potentials and deviation surfaces in the form of Fourier-Stieltjes integrals is derived.*

*Key-words: stochastic waves in a liquid, the method of stochastic amplitudes.*

**Постановка проблеми.** Практичний інтерес до дослідження хвильових рухів викликаний сучасними потребами розробки нових методів гасіння хвиль, нових способів отримання енергії, а також конструюванням нових видів водного транспорту. Експериментальні та теоретичні дослідження хвильових рухів проводяться в багатьох країнах світу, зокрема, в Швеції, Норвегії, Австралії, Данії, США, Японії, Британії та Китаї. З розвитком сучасних засобів математичного моделювання варто окремо звернути увагу на значний інтерес до вивчення випадкових хвиль при розгляді різних задач прикладного характеру, зокрема, у гідромеханіці. Актуальність дослідження випадкових хвильових рухів обумовлена також тим, що такі хвилі математично добре наближено описують реальні хвильові процеси, які відбуваються на поверхні та всередині водного шару. Дослідження випадкових хвиль в двошаровій рідині дає можливість глибше зрозуміти механізми поширення внутрішніх хвиль.

**Аналіз досліджень і публікацій.** У [1] представлено новий чисельний метод дослідження вільних поверхневих хвиль в прибережних районах. Метод базується на варіаційній моделі Буссінеска (VBM) з фазовою здатністю. У цій моделі враховано негідростатичний тиск, що дозволяє правильно описати динаміку коротких хвиль. Як результат, запропонована схема здатна з великою точністю математично описувати різні хвилі. Також продемонстровано здатність чисельної схеми моделювати ефекти дисперсії і нелінійності за допомогою моделювання поширення ширококутових хвиль. Крім того, чисельна модель тестується для моделювання регулярного розбиття хвилі на плоскому пляжі Тинга і Кірбі, та для моделювання випадкової хвилі над залитим пляжем Бур

У [2] описано реалізацію генерації і активного поглинання хвиль для довгих гребнів монохроматичних і випадкових хвиль другого порядку в моделі гідродинаміки на основі WCSPH (слабко стислива згладжена частка). Числовий потік нагадує фізичний хвильовий пристрій, для якого, рухомі межі імітують дію генератора хвиль поршневого типу. Система генерації

хвиль другого порядку, що здатна генерувати як монохроматичні (регулярні), так і випадкові (нерегулярні) хвилі, реалізується спільно з пасивним і активним поглинанням хвиль. Ці реалізації підтверджуються теоретичними розв'язками і експериментальними результатами щодо висоти поверхні води, орбітальних швидкостей хвиль.

Стаття [3] присвячена вивченню нелінійної взаємодії однорідних випадкових поверхневих хвиль океану. В ній отримано кінетичні рівняння для вивчення еволюції спектральної щільності, для яких використовувалися дещо різні припущення. За допомогою використання аналітичних і чисельних методів та аналізу точних розв'язків продемонстровано, що недавно отримане узагальнене кінетичне рівняння демонструє вибух за скінченний час для деяких вироджених квартетів хвиль.

У [4] теоретично описано інтерферометрію випадкових поверхневих гравітаційних хвиль, що продемонстровано з використанням чисельного моделювання і результатів експериментальних досліджень океанських хвиль. Моделювання та вимірювання хвильового пакету добре узгоджуються з теоретичними результатами, але взаємні кореляції не дають передбаченої структури. Дано можливі пояснення такого явища.

У дослідженні [5] подано результати експериментів з CFD на випадкових хвилях для вивчення процесу навантаження хвилеріза з похилим верхом кесона. Чисельні результати показують, що зменшення хвильової сили під гребенем призводить до руйнування структури в бік моря навіть за відсутності сильного удару. Цей висновок узгоджується з результатами спостережень відмов ряду вертикальних хвилерізів в першій половині 20-го століття. Ці результати також показують, що хвильові тиски під впадиною можуть бути недостатньо враховані, якщо використовувати наявні у даний час розрахункові формули. Для вирішення цієї проблеми пропонується низка простих альтернативних рівнянь, що базуються на концепції максимального потоку імпульсу.

Авторами дослідження [6] експериментально вивчається поширення у великомасштабному басейні односпрямованих глибоководних гравітаційних хвиль, стохастично модульованих за фазою. Спостерігається поява нелінійних локалізованих структур, які розвиваються на стохастичному хвильовому полі. Таке співіснування розглядалося в рамках теорії інтегрованої турбулентності для нелінійного рівняння Шредінгера. Повідомлено про перше експериментальне спостереження в контексті гідродинамічних хвиль. Охарактеризовано формування, властивості і динаміку цих нелінійних когерентних структур (солітонів) на фоні некогерентних хвиль. Екстремальні хвилі виникають у результаті сильного загострення фронтів хвильових цугів і їх поява відбувається після приблизно однієї нелінійної шкали поширення. Солітони виникають, коли нелінійність і дисперсія слабкі. Охарактеризовано статистичні властивості цього стану. Виявлено, що кількість солітонів і екстремальних хвиль збільшується по всьому поширенню, розподіл хвильового поля має важкий хвіст, а спектр висот поверхні визначається масштабом як степеневий закон частоти з показником степеня  $-4,5$  ( $\pm 0,5$ ). Більшість цих спостережень узгоджуються з теорією інтегрованої турбулентності, хоча деякі відхилення (наприклад, степеневий спектр, асиметричні екстремальні хвилі) є результатом ефектів, властивих гідродинамічним хвилям.

У [7] на основі експериментальних даних запропоновано і перевірено статистичну теорію хвиль-вбивць, зібраних у довгому резервуарі для води, де механічно генеруються випадкові хвилі з різним ступенем нелінійності, які вільно поширюються уздовж потоку. Надано переконливі докази того, що хвилі-вбивці, які спостерігаються в акваріумі, є гідродинамічними інстантонами, тобто конфігураціями сідлової точки, які пов'язані зі стохастичною моделлю хвильової системи.

Показано, що ці гідродинамічні інстантони являють собою складні просторово-часові конфігурації хвильового поля, які можуть бути визначені з використанням математичної основи теорії великих ухилень і розраховані за

допомогою спеціальних чисельних методів. Ці результати показують, що інстантони однаково добре описують хвилі-вбивці, створювані простою лінійною суперпозицією (за слабо нелінійних умов) або нелінійним фокусуванням (за сильно нелінійних умов).

У [8] досліджено вплив сильного і поривчастого поля вітру на океанські хвилі. Для того, щоб отримати уявлення про генерацію хвиль за допомогою вітру, аналізується вплив випадкового вітру на відокремлені хвилі. За допомогою рівняння Ейлера для динаміки рідини і методу багатьох масштабів для випадкових вітрових вимушених нелінійних глибоководних хвиль отримано випадкове нелінійне рівняння Шредінгера і випадкове модифіковане нелінійне рівняння Шредінгера, які вивчаються за допомогою релаксаційної псевдоспектральної схеми. Отримані результати свідчать про те, що вплив поривчастого вітру на відокремлені хвилі призводить до випадкового збільшення поверхні океанської хвилі. Однак в лабораторній установці з набагато меншими амплітудами хвиль і більш високими частотами хвиль вплив в'язкості води є набагато вищим. Це призводить до коливань розв'язків, які чутливі до дії вітру.

**Мета статті.** Проведені дослідження ставили за мету виконати математичну постановку задачі про поширення внутрішніх та поверхневих стохастичних хвиль в двошаровій гідродинамічній системі «шар з твердим дном шар з вільною поверхнею». Для отриманої постановки провести обезрозмірювання та визначити метод подальшого дослідження задачі.

#### **Виклад основних результатів дослідження.**

Досліджується задача про поширення стохастичних хвиль на поверхні рідкого шару  $\Omega_1 = \{(x, z) : |x| < \infty, -h_1 \leq z < 0\}$  з густиною  $\rho_1$  та верхнього рідкого шару  $\Omega_2 = \{(x, z) : |x| < \infty, 0 \leq z \leq h_2\}$  з густиною  $\rho_2$ . Шари розділені поверхнею контакту  $z = \eta(x, t)$ , а верхній шар обмежений згори вільною поверхнею  $z = \eta_0(x, t)$ . При розв'язанні враховується сила поверхневого натягу на поверхні контакту та на вільній поверхні. Сила тяжіння направлена

перпендикулярно поверхні розподілу у від'ємному  $z$ -напрямку, рідини вважаються нестисливими (рис. 1). Математична постановка задачі має наступний вигляд:

швидкість поширення пакетів у відповідних областях виражаються через градієнти потенціалів і повинні задовольняти рівнянням

$$\frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial z^2} = 0 \text{ у } \Omega_j, j = 1, 2, \quad (1)$$

кінематичні умови на поверхні контакту та на вільній поверхні

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} - \frac{\partial \varphi_j}{\partial z} = - \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x} \text{ при } z = \eta(x, t), j = 1, 2, \quad (2)$$

$$\frac{\partial \eta_0}{\partial t} - \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} = - \frac{\partial \eta_0}{\partial x} \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} \text{ при } z = \eta_0(x, t), \quad (3)$$

динамічні умови на поверхні контакту та на вільній поверхні

$$\rho_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} - \rho_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial t} + g(\rho_1 - \rho_2)\eta + \frac{1}{2}\rho_1(\nabla \varphi_1)^2 - \frac{1}{2}\rho_2(\nabla \varphi_2)^2 -$$

$$-T \left( 1 + \left( \frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 \right)^{\frac{3}{2}} \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} = 0 \text{ при } z = \eta(x, t), \quad (4)$$

$$\rho_1 \frac{\partial \varphi_2}{\partial t} + g\rho_1\eta_0 + \frac{1}{2}\rho_1(\nabla \varphi_2)^2 - T_0 \left( 1 + \left( \frac{\partial \eta_0}{\partial x} \right)^2 \right)^{\frac{3}{2}} \frac{\partial^2 \eta_0}{\partial x^2} = 0 \text{ при } z = \eta_0(x, t), \quad (5)$$

умова непротікання на дні

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial z} = 0 \text{ при } z = -h_1, \quad (6)$$

тут  $\varphi_j$  ( $j=1,2$ ) потенціали швидкості в  $\Omega_j$ ,  $\eta$  - відхилення поверхні контакту,  $\eta_0$  - відхилення вільної поверхні,  $T$  та  $T_0$  - коефіцієнти поверхневого натягу на поверхні контакту та на вільній поверхні,  $g$  - прискорення вільного падіння.

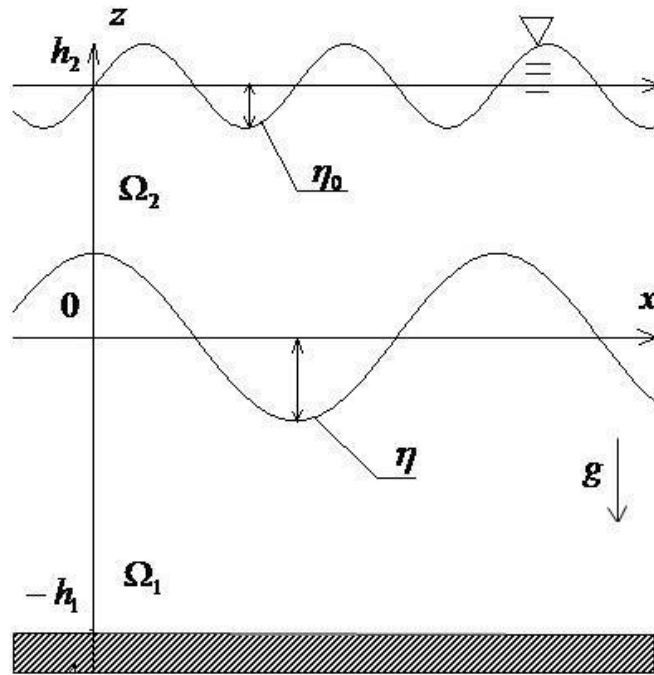


Рис 1. Постановка задачі

Введемо безрозмірні величини за допомогою характерної довжини  $L$ , що рівна товщині верхнього шару  $h_2$ , максимального відхилення вільної поверхні  $a$ , характерного часу  $(L/g)^{1/2}$ , густини нижньої рідини  $\rho_1$ . Перейдемо до безрозмірних величин, які позначимо зірочкою,

$$(x, z) = L(x^*, z^*), \quad t = \sqrt{\frac{L}{g}} t^*, \quad \rho_2 = \rho_1 \rho^*, \quad (\eta, \eta_0) = a(\eta^*, \eta_0^*),$$

$$\varphi = \frac{La}{\sqrt{L/g}} \varphi^*, \quad (T, T_0) = L^2 \rho_1 g (T^*, T_0^*). \quad (7)$$

Позначивши величину  $\frac{a}{L} = \alpha$  та використавши формули (7),

перепишемо систему (1) - (6) у безрозмірних величинах

$$\frac{\partial^2 \varphi_j^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 \varphi_j^*}{\partial z^{*2}} = 0 \quad \text{у} \quad \Omega_j, \quad j=1,2, \quad (8)$$

кінематичні умови на поверхні контакту та на вільній поверхні

$$\frac{\partial \eta^*}{\partial t^*} - \frac{\partial \varphi_j^*}{\partial z^*} = -\alpha \frac{\partial \eta^*}{\partial x^*} \frac{\partial \varphi_j^*}{\partial x^*} \quad \text{при} \quad z^* = \alpha \eta^*(x, t), \quad (j=1,2) \quad (9)$$

$$\frac{\partial \eta_0^*}{\partial t^*} - \frac{\partial \varphi_2^*}{\partial z^*} = -\alpha \frac{\partial \eta_0^*}{\partial t^*} \frac{\partial \varphi_2^*}{\partial z^*} \quad \text{при } z^* = \alpha \eta_0^*(x, t), \quad (10)$$

динамічні умови на поверхні контакту та на вільній поверхні

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi_1^*}{\partial t^*} - \rho^* \frac{\partial \varphi_2^*}{\partial t^*} + (1 - \rho^*) \eta^* + \frac{1}{2} \alpha (\nabla \varphi_1^*)^2 - \frac{1}{2} \alpha \rho^* (\nabla \varphi_2^*)^2 - \\ - T^* \left( 1 + \left( \alpha \frac{\partial \eta^*}{\partial x^*} \right)^2 \right)^{\frac{3}{2}} \frac{\partial^2 \eta^*}{\partial x^{*2}} = 0 \quad \text{при } z^* = \alpha \eta^*(x, t), \end{aligned} \quad (11)$$

$$\frac{\partial \varphi_2^*}{\partial t^*} + \eta^* + \frac{1}{2} \alpha (\nabla \varphi_2^*)^2 - T_0^* \left( 1 + \left( \alpha \frac{\partial \eta_0^*}{\partial x^*} \right)^2 \right)^{\frac{3}{2}} \frac{\partial^2 \eta_0^*}{\partial x^{*2}} = 0 \quad \text{при } z^* = \alpha \eta_0^*(x, t), \quad (12)$$

гранична умова на дні

$$\frac{\partial \varphi_1^*}{\partial z^*} = 0 \quad \text{при } z^* = -h_1^* = -\frac{h_1}{L} \quad (13)$$

де  $\alpha$  – коефіцієнт нелінійності,  $\rho = \rho_1 / \rho_2$  - відношення густин рідких шарів.

Вважаємо, що коефіцієнт нелінійності  $\alpha$  значно менший за одиницю, тому дана модель описує слабконелінійну двошарову систему з дисперсією. Для полегшення записів далі зірочку опускаємо.

Розв'язок задачі (8) – (13) будемо шукати у вигляді розкладів невідомих потенціалів та відхилень через стохастичні амплітуди. Згідно (8) та граничної умови (13) зі розклади можна записати у вигляді інтегралів Фур'є –Стілтєса:

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \int A_q \exp(i\theta) \left[ \exp(|\bar{k}|(z + h_1)) + \exp(-|\bar{k}|(z + h_1)) \right] dq, \\ \varphi_2 &= \int B_q \exp(i\theta) \left[ \exp(|\bar{k}|(z - h_2)) + \exp(-|\bar{k}|(z - h_2)) \right] dq, \\ \eta &= \int C_q \exp(i\theta) dq, \\ \eta_0 &= \int L_q \exp(i\theta) dq. \end{aligned} \quad (14)$$

У (14)  $\bar{k} = (k_x, k_y)$  - хвильовий вектор;  $A_q, B_q, C_q, L_q$  стохастичні амплітуди, які залежать від  $q = (\omega, \bar{k})$ ;  $\theta = xk_x + yk_y - \omega t$  - фаза.



**Висновки та перспективи подальших пошуків у напрямі дослідження.** В подальшому, підстановка (14) у (9) – (12) дасть можливість отримати зв'язок між стохастичними величинами  $A_q, B_q, C_q, L_q$  та, в результаті, отримати узагальнене динамічне рівняння відносно однієї з них.

### **Список використаної літератури**

1. Adytia D., Pudjaprasetya S.R., Tarwidi D. Modeling of wave run-up by using staggered grid scheme implementation in 1D Boussinesq model / D. Adytia, S.R. Pudjaprasetya, D. Tarwidi // Computational Geosciences. – 2019. – Vol. 23, Issue 4. – P. 793-811. doi: 10.1007/s10596-019-9821-5
2. Altomare C., Dominguez J.M., Crespo A.J.C., Gonzalez-Cao J., Suzuki T., Gomez-Gesteira M., Troch P. Long-crested wave generation and absorption for SPH-based DualSPHysics model] / C. Altomare, J.M. Dominguez, A.J.C. Crespo, J. Gonzalez-Cao, T. Suzuki, M. Gomez-Gesteira, P. Troch // Coastal Engineering. – 2017. – Vol. 127. – P. 37-54. doi: 10.1016/j.coastaleng.2017.06.004
3. Andrade D., Stuhlmeier R., Stiassnie M. On the Generalized Kinetic Equation for Surface Gravity Waves, Blow-Up and Its Restraint / D. Andrade, R. Stuhlmeier, M. Stiassnie // Fluids. – 2018. – Vol. 4, Issue 1. – doi: 10.3390/fluids4010002
4. Brown M.G., Lu C. Green's function retrieval in a field of random water waves / M.G. Brown, C. Lu // Wave Motion. – 2016. – Vol. 60. – P. 8-19. doi: 10.1016/j.wavemoti.2015.08.003
5. Buccino M., Daliri M., Dentale F., Di Leo A., Calabrese M. CFD experiments on a low crested sloping top caisson breakwater. Part 1. nature of loadings and global stability / M. Buccino, M. Daliri, F. Dentale, A. Di Leo, M. Calabrese // Ocean Engineering. – 2019. – Vol. 182. – P. 259-282. doi: 10.1016/j.oceaneng.2019.04.017
6. Cazaubiel A., Michel G., Lepot S., Semin B., Aumaitre S., Berhanu M., Bonnefoy F., Falcon E. Coexistence of solitons and extreme events in deep water surface waves / A. Cazaubiel, G. Michel, S. Lepot, B. Semin, S. Aumaitre, M. Berhanu, F. Bonnefoy, E. Falcon // Physical review fluids. – 2018. – Vol. 3, Issue 11. doi: 10.1103/PhysRevFluids.3.114802
7. Dematteis G., Grafke T., Onorato M., Vanden-Eijnden E. Experimental Evidence of Hydrodynamic Instantons: The Universal Route to Rogue Waves / G. Dematteis, T. Grafke, M. Onorato, E. Vanden-Eijnden // Physical review X. – 2019. – Vol. 9, Issue 4. doi: 10.1103/ doi: 10.1103/PhysRevX.9.041057
8. Dostal L. The Effect of Random Wind Forcing in the Nonlinear Schrodinger Equation / L. Dostal // Fluids. – 2019. – Vol. 4, Issue 3. doi: 10.3390/fluids4030121