

УДК 532.5

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ ПРО ПОШИРЕННЯ ХВИЛЬ В ТРИШАРОВІЙ РІДИНІ З ВІЛЬНОЮ ПОВЕРХНЕЮ

Володмир Наратовий, Валерій Демідов

Науковий керівник: канд. тех. наук, доцент Наратовий В.В.
*Центральноукраїнський державний педагогічний університет імені
Володимира Винниченка, м. Кропивницький, Україна*

В статті виконано постановку нової нелінійної задачі про поширення хвиль в тришаровій гідродинамічній системі « шар з твердим дном – шар – шар з вільною поверхнею». Виконано обезрозмірювання математичної постановки задачі. Для дослідження використано асимптотичний метод багато масштабних розвинень. В результаті отримано три перші лінійні наближення вказаної задачі про поширення хвиль в тришаровій системі скінченної глибини.

Ключові слова: хвилі в рідині, метод багато масштабних розвинень.

STATEMENT OF THE PROBLEM ON THE PROPAGATION OF WAVES IN A THREE-LAYER FLUID WITH A FREE SURFACE

Volodymyr Naradovyi, Valerii Demidov

Scientific supervisor: Doctor of PhD, Docent Naradovyi V.V.
*Volodymyr Vynnychenko Central Ukrainian State Pedagogical University,
Kropyvnytsky, Ukraine*

The article presents a new nonlinear problem of wave propagation in a three-layer hydrodynamic system "layer with a solid bottom - layer - layer with a free surface". The dimensionlessness of the mathematical formulation of the problem is performed. The asymptotic method of many large-scale developments was used for research. As a result, the first three linear approximations of this problem of wave propagation in a three-layer system of finite depth are obtained.

Key-words: waves in a liquid, a method of many large-scale developments

Вступ. Майже будь-яка область науки або техніки пов'язана з хвильовими рухами. Велике практичне значення мають дослідження поведінки хвиль у системах різного типу стратифікації за густиною.

Дослідження особливостей моделей таких систем потребує знання складного математичного апарату, громіздких аналітичних перетворень, тривалих чисельних обчислень та використання спеціальних математичних пакетів.

Таким чином, актуальним є дослідження та аналіз проблеми про поширення внутрішніх та поверхневих хвильових пакетів в гідродинамічній системі «шар з твердим дном – рідкий шар – шар з вільною поверхнею» із застосуванням методу багатомасштабних розвинень з врахуванням сили поверхневого натягу на вільній поверхні та на поверхнях контакту.

У роботі [1] досліджуються умови розповсюдження хвиль в двошаровій рідині з вільною поверхнею. Авторами проаналізовано корені дисперсійного рівняння для проблеми розповсюдження хвилі в двошаровій рідині кінцевої глибини з вільною поверхнею для різних значень співвідношення щільностей. Показано, що корені, отримані в граничних випадках, добре узгоджуються з раніше відомими результатами. Доведено існування двох лінійно-незалежних розв'язків задачі в першому наближенні.

У роботі [2] досліджується енергія руху хвиль в двошаровій гідродинамічній системі - «шар з твердим дном - шар з вільною поверхнею». Проаналізовано залежності енергій руху внутрішніх і поверхневих хвиль від геометричних і фізичних параметрів системи. Оцінюється внесок другого наближення в повну енергію системи. Перевіряється надійність отриманих результатів. Результати графічно проілюстровані.

У роботі [3] експериментально досліджуються міжфазові внутрішні хвилі в стратифікованій рідині, спричинені періодичними збуреннями вільної поверхні у закритому резервуарі. Досліджено зв'язок між горизонтальними поверхневими швидкостями та внутрішніми хвильовими амплітудами, якісно описуються схеми розвитку потоку, а хвильові швидкості внутрішніх хвиль систематично аналізуються і порівнюються з лінійними 2- і 3-шаровими теоріями. Виявлено, що, незважаючи на те, що спостережувані внутрішні

хвилі можуть мати значні амплітуди, лінійне 3-шарове наближення все ж досить добре узгодженя з експериментальними результатами.

У [4] досліджується взаємодія північно-атлантичних бароклінних хвильових пакетів і середземноморської бурі. Результати дослідження показують, що основне джерело енергії для розвитку циклонів обумовлений зниженням потоку через існуючі висхідні збурення. Цей процес пов'язаний з поширенням когерентних хвильових пакетів, що зв'язують зиму в Північній Атлантиці і Середземному морі. Представлені два спеціально відібраних випадки: один з явним поширенням хвильового пакета в Середземноморський регіон від північноатлантичного штормового шляху, а інший з зональним поширенням хвильових пакетів вздовж центральної широти північноатлантичного штормового шляху. Показано, що ці два випадки надають явний вплив на горизонтальний потік хвильової активності через область, що оточують Середземну штормову доріжку.

У [5] вивчається поведінка слабо нелінійних океанічних внутрішніх хвиль при наявності фонового обертання і зсувного потоку, коли два окремих лінійних довгохвильових режими мають майже однакові фазові швидкості. Хвилі описуються системою пов'язаних рівнянь Островського, отриманих з повного набору рівнянь Ейлера для нестискуючої густини стратифікованої рідини з вільною поверхнею та жорсткими нижніми граничними умовами.

У [6] вивчаються хвилі на границі двох тонких горизонтальних шарів рідин, що не змішуються, схильних до високочастотних горизонтальних коливань. У цій роботі виводяться еволюційні рівняння для довгих хвиль в системі, які виявляються ідентичними до рівняння Буссінеска. Показано, що залежно від початкових збурень нестійкі солітони або ростуть вибуховим чином, що означає розрив шару за кінцевий час, або розкладаються на стабільні солітони. Результати отримані в довгохвильовому наближенні як аналіз лінійної стійкості для стану плоскої поверхні.

У роботі [7] розглядається взаємодія внутрішніх та поверхневих хвиль у двошаровій рідині з вільною поверхнею. Досліджено амплітуди другої

гармоніки висот поверхні контакту та вільної поверхні для двох пар частот центру хвильового пакету. Показано, що хвильовий гребінь рухається швидше, ніж основа, і руйнується, тоді як воно стає гладким через розсіювання. Ефект визначається впливом нелінійності та дисперсії на поширення внутрішніх і поверхневих хвиль.

У роботі [8] проблема поширення внутрішніх і поверхневих хвиль у гідродинамічній системі "шар з жорстким дном – шар з вільною поверхнею" з урахуванням вітрових хвиль досліджена методом чисельного моделювання.

У роботі [9] автори досліджують взаємодію малих внутрішніх хвильових пакетів з великомасштабною внутрішньою одиночною хвилею за допомогою прямого чисельного моделювання високої роздільної здатності в двох вимірах. Ключовим висновком дослідження є той факт, що для хвильових пакетів, складові хвилі яких короткі в порівнянні з одиночною шириною хвилі, взаємодія призводить до майже повного руйнування коротких хвиль.

Авторами дослідження [10] розглянуто теоретичну модель внутрішніх одиночних хвиль великої амплітуди в слабко стратифікованій рідині. Показано, що зворотна задача щодо визначення мілкомасштабної структури профілю густини за допомогою відомої кривої амплітудної дисперсії зводяться до розв'язання лінійного інтегрального рівняння Фредгольма першого роду, що має особливу форму ядра. У випадку аналітичної стратифікації встановлюється взаємне співвідношення між коефіцієнтом щільності та функцією дисперсії.

Постановка задачі та метод дослідження.

Досліджується задача про поширення тривимірних хвильових пакетів скінченної амплітуди на поверхні рідкого шару $\Omega_1 = \{(x, z) : |x| < \infty, -h_1 \leq z < 0\}$ з густиною ρ_1 , рідкого шару над ним $\Omega_2 = \{(x, z) : |x| < \infty, 0 \leq z \leq h_2\}$ з густиною ρ_2 та верхнього рідкого шару $\Omega_3 = \{(x, z) : |x| < \infty, h_2 \leq z \leq h_2 + h_3\}$ з густиною ρ_3 . Шари Ω_1 і Ω_2 розділені поверхнею контакту $z = \eta_1(x, t)$, шари Ω_2 і Ω_3 розділені поверхнею контакту

$z = \eta_2(x, t)$, а верхній шар обмежений згори вільною поверхнею $z = \eta_3(x, t)$. При розв'язанні враховується сили поверхневих натягів на поверхнях контакту та на вільній поверхні. Сила тяжіння направлена перпендикулярно поверхні розподілу у від'ємному z -напрямку, рідини вважаються нестисливими (рис. 1). Математична постановка задачі має наступний вигляд:

швидкість поширення пакетів у відповідних областях виражаються через градієнти потенціалів і повинні задовольняти рівнянням

$$\varphi_{j,xx} + \varphi_{j,zz} = 0 \text{ у } \Omega_j, \quad j = 1, 2, 3 \quad (1)$$

кінематичні умови на поверхнях контакту та на вільній поверхні

$$\eta_{1,t} - \varphi_{j,z} = -\varphi_{j,x} \eta_{1,x} \text{ при } z = \eta_1(x, t), \quad j = 1, 2 \quad (2)$$

$$\eta_{2,t} - \varphi_{j,z} = -\varphi_{j,x} \eta_{2,x} \text{ при } z = h_2 + \eta_2(x, t), \quad j = 2, 3 \quad (3)$$

$$\eta_{3,t} - \varphi_{j,z} = -\varphi_{j,x} \eta_{3,x} \text{ при } z = h_1 + h_2 + \eta_3(x, t) \quad (4)$$

динамічні умови на поверхні контакту та на вільній поверхні

$$\rho_1 \varphi_{1,t} - \rho_2 \varphi_{2,t} + g(\rho_1 - \rho_2) \eta_1 + \frac{1}{2} \rho_1 (\nabla \varphi_1)^2 + \frac{1}{2} \rho_2 (\nabla \varphi_2)^2 - T_1 \left(1 + (\eta_{1,x})^2 \right)^{\frac{3}{2}} \eta_{1,xx} = 0$$

при $z = \eta_1(x, t)$

$$\rho_2 \varphi_{2,t} - \rho_3 \varphi_{3,t} + g(\rho_1 - \rho_2) \eta_2 + \frac{1}{2} \rho_2 (\nabla \varphi_2)^2 + \frac{1}{2} \rho_3 (\nabla \varphi_3)^2 - T_1 \left(1 + (\eta_{2,x})^2 \right)^{\frac{3}{2}} \eta_{2,xx} = 0$$

при $z = h_2 + \eta_2(x, t)$ (5)

$$\rho_3 \varphi_{3,t} + g \rho_3 \eta_3 + \frac{1}{2} \rho_3 (\nabla \varphi_3)^2 - T_3 \left(1 + (\eta_{3,x})^2 \right)^{\frac{3}{2}} \eta_{3,xx} = 0 \text{ при } z = h_1 + h_2 + \eta_3(x, t) \quad (6)$$

умова непроникливості на дні

$$\varphi_{1,z} = 0 \text{ при } z = -h_1, \quad (7)$$

тут φ_j ($j = 1, 2, 3$) потенціали швидкості частинок в Ω_j , η_1, η_2 - відхилення поверхонь контакту, η_3 - відхилення вільної поверхні, T_1, T_2 та T_3 -

коефіцієнти поверхневого натягу на відповідних поверхнях контакту та на вільній поверхні, g - прискорення вільного падіння.

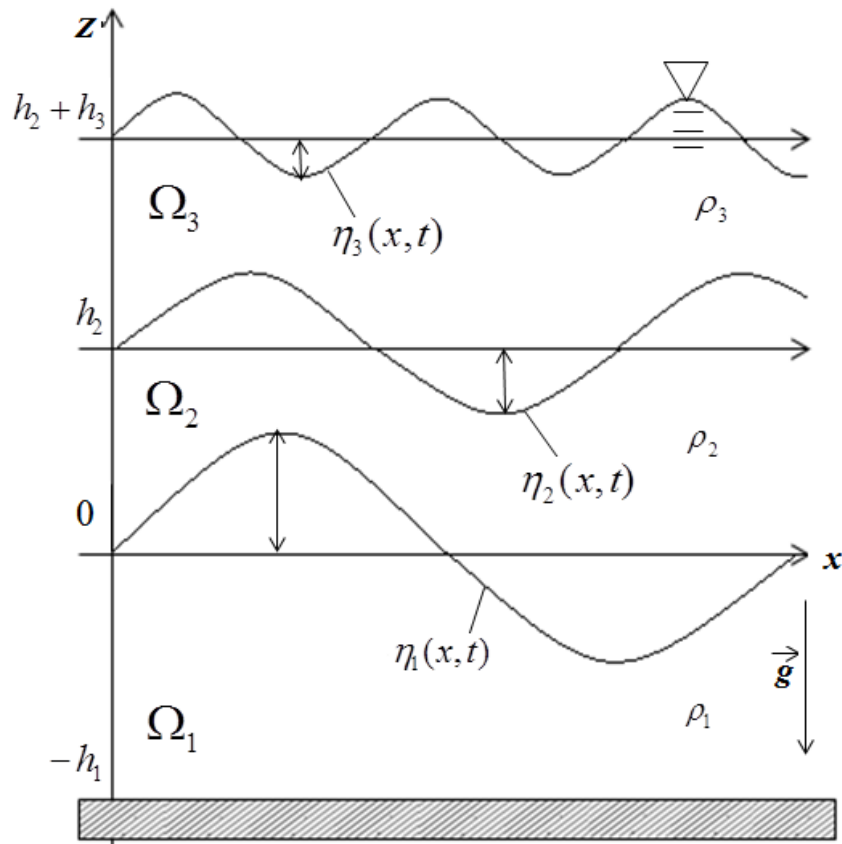


Рис 1. Постановка задачі

Введемо безрозмірні величини за допомогою характерних довжини L та товщини H , максимального відхилення вільної поверхні a , характерного часу $L/(gH)^{1/2}$, густини нижньої рідини ρ_1 . Перейдемо до безрозмірних величин, які позначимо зірочкою,

$$x = Lx^*, \quad z = Hz^*, \quad \eta_j = a\eta_j^*, \quad j = 1, 2, 3, \quad t = \frac{L}{\sqrt{gH}} t^* \quad (8)$$

$$\varphi_j = \frac{gL a}{\sqrt{gH}} \varphi_j^*, \quad T_j = L^2 \rho_1 g T_j^*, \quad \rho_j = \rho_1 \rho_j^*, \quad j = 1, 2, 3$$

Позначивши величини $\alpha = \frac{a}{H}$, $\beta = \frac{H^2}{L^2}$ перепишемо систему (1)-(7) у безрозмірних величинах

$$\varphi_{j,x^*x^*}^* + \frac{1}{\beta} \varphi_{j,z^*z^*}^* = 0 \quad \text{у} \quad \Omega_j, \quad j = 1, 2, 3 \quad (9)$$

кінематичні умови на поверхні контакту та на вільній поверхні

$$\eta_{1,t}^* - \frac{1}{\beta} \varphi_{j,z}^* = -\alpha \varphi_{j,x}^* \eta_{1,x}^* \text{ при } z^* = \alpha \eta_1(x,t), \quad j = 1,2 \quad (10)$$

$$\eta_{2,t}^* - \frac{1}{\beta} \varphi_{j,z}^* = -\alpha \varphi_{j,x}^* \eta_{2,x}^* \text{ при } z^* = \frac{h_2}{H} + \alpha \eta_2(x,t), \quad j = 2,3 \quad (11)$$

$$\eta_{3,t}^* - \frac{1}{\beta} \varphi_{j,z}^* = -\alpha \varphi_{j,x}^* \eta_{3,x}^* \text{ при } z^* = \frac{h_2 + h_3}{H} + \alpha \eta_3(x,t) \quad (12)$$

динамічні умови на поверхні контакту та на вільній поверхні

$$\begin{aligned} & \varphi_{1,t}^* - \rho_2 \varphi_{2,t}^* + g(1 - \rho_2) \eta_1^* + \frac{1}{2} \alpha \left((\varphi_{1,x}^*)^2 + \frac{1}{\beta} (\varphi_{1,z}^*)^2 \right) - \\ & - \frac{1}{2} \alpha \rho_2 \left((\varphi_{1,x}^*)^2 + \frac{1}{\beta} (\varphi_{1,z}^*)^2 \right) - T_1 \left(1 + \alpha^2 \beta (\eta_{1,x}^*)^2 \right)^{\frac{3}{2}} \eta_{1,x}^* = 0 \text{ при } z^* = \alpha \eta_1(x,t) \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} & \rho_2 \varphi_{1,t}^* - \rho_3 \varphi_{2,t}^* + g(\rho_2 - \rho_1) \eta_2^* + \frac{1}{2} \alpha \rho_2 \left((\varphi_{1,x}^*)^2 + \frac{1}{\beta} (\varphi_{1,z}^*)^2 \right) - \\ & - \frac{1}{2} \alpha \rho_3 \left((\varphi_{1,x}^*)^2 + \frac{1}{\beta} (\varphi_{1,z}^*)^2 \right) - T_2 \left(1 + \alpha^2 \beta (\eta_{2,x}^*)^2 \right)^{\frac{3}{2}} \eta_{2,x}^* = 0 \\ & \text{при } z^* = \frac{h_2}{H} + \alpha \eta_2(x,t) \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} & \rho_3 \varphi_{3,t}^* + \rho_3 \eta_3^* + \frac{1}{2} \rho_3 \left((\varphi_{3,x}^*)^2 + \frac{1}{\beta} (\varphi_{3,z}^*)^2 \right) - T_3 \left(1 + \alpha^2 \beta (\eta_{3,x}^*)^2 \right)^{\frac{3}{2}} \eta_{3,x}^* = 0 \\ & \text{при } z^* = \frac{h_2 + h_3}{H} + \alpha \eta_3(x,t), \end{aligned} \quad (15)$$

гранична умова на дні

$$\varphi_{1,z}^* = 0 \text{ при } z^* = -\frac{h_1}{H} \quad (16)$$

де α, β – коефіцієнти нелінійності, $\rho_i = \rho_i \rho_i^*$ ($i = 1, 2, 3$) – відношення густин рідких шарів.

Вважаємо, що коефіцієнт не лінійності α значно менший за одиницю, тому дана модель описує слабо нелінійну тришарову систему з дисперсією.

Для полегшення записів далі зірочку опускатимемо. Якщо припустити що характерна довжина L рівна характерній товщині H , то $\beta=1$.

Для розв'язування задачі використаємо метод багатомасштабних розвинень до третього порядку. Представимо шукані функції відхилення першої та другої поверхонь контакту, відхилення вільної поверхні та потенціали швидкостей у вигляді

$$\eta(x, t) = \sum_{n=1}^3 \alpha^{n-1} \eta_{jn}(x_0, x_1, x_2, t_0, t_1, t_2) + O(\alpha^3), \quad j=1,2,3 \quad (17)$$

$$\varphi(x, t, z) = \sum_{n=1}^3 \alpha^{n-1} \varphi_{jn}(x_0, x_1, x_2, z, t_0, t_1, t_2) + O(\alpha^3), \quad j=1,2,3 \quad (18)$$

де $x_j = \alpha^j x$ та $t_j = \alpha^j t$ ($j=0, 1, 2$).

Підставляючи (17) – (18) у (9) – (16) та прирівнюючи вирази при однакових степенях α , отримаємо три лінійні задачі.

задача першого наближення (при α^0)

$$\varphi_{j1, x_0 x_0} + \varphi_{j1, z z} = 0 \quad y, \Omega_j, \quad j=1,2,3$$

$$\eta_{11, t_0} - \varphi_{j1, z} = 0 \quad \text{на } z=0, \quad j=1,2$$

$$\eta_{21, t_0} - \varphi_{j1, z} = 0 \quad \text{на } z=h_2, \quad j=2,3$$

$$\eta_{31, t_0} - \varphi_{31, z} = 0 \quad \text{на } z=h_2+h_3$$

$$\varphi_{11, t_0} - \rho_2 \varphi_{21, t_0} + (1-\rho_2) \eta_{11} - T_1 \eta_{11, x_0 x_0} = 0 \quad \text{на } z=0$$

$$\rho_2 \varphi_{21, t_0} - \rho_3 \varphi_{31, t_0} + (\rho_2 - \rho_3) \eta_{21} - T_2 \eta_{21, x_0 x_0} = 0 \quad \text{на } z=h_2$$

$$\rho_3 \varphi_{31, t_0} + \rho_3 \eta_{31} - T_3 \eta_{31, x_0 x_0} = 0 \quad \text{при } z=h_2+h_3$$

$$\varphi_{11, z} = 0 \quad \text{на } z=-h_1. \quad (19)$$

задача другого наближення (при α)

$$\varphi_{j2, x_0 x_0} + \varphi_{j2, z z} = -2\varphi_{11, x_0 x_1} \quad y, \Omega_j, \quad j=1,2,3$$

$$\eta_{12, t_0} - \varphi_{j2, z} = -\eta_{11, x_0} \varphi_{j1, x_0} - \eta_{11, t_1} \quad \text{на } z=0, \quad j=1,2$$

$$\eta_{22, t_0} - \varphi_{j2, z} = -\eta_{21, x_0} \varphi_{j1, x_0} - \eta_{21, t_1} \quad \text{на } z=h_2, \quad j=2,3$$

$$\eta_{32,t_0} - \varphi_{32,z} = -\eta_{31,x_0} \varphi_{31,x_0} - \eta_{31,t_1} \text{ на } z = h_2 + h_3$$

$$\begin{aligned} \varphi_{12,t_0} - \rho_2 \varphi_{22,t_0} + (1 - \rho_2) \eta_{12} - T_1 \eta_{12,x_0 x_0} = & -\varphi_{11,t_1} + \rho_2 \varphi_{21,t_1} - \frac{1}{2} \left((\varphi_{11,x_0})^2 + (\varphi_{11,z})^2 \right) + \\ & + \rho_2 (\varphi_{21,z})^2 + 2T_1 \eta_{11,x_0 x_1} \end{aligned}$$

на $z = 0$

$$\begin{aligned} \rho_2 \varphi_{22,t_0} - \rho_3 \varphi_{32,t_0} + g(\rho_2 - \rho_3) \eta_{22} - \frac{1}{2} \rho_3 (\varphi_{32,z})^2 - T_2 \eta_{22,x_0 x_0} = & -\rho_2 \varphi_{21,t_1} + \rho_3 \varphi_{31,t_1} - \\ & - \frac{1}{2} \rho_2 \left((\varphi_{21,x_0})^2 + (\varphi_{21,z})^2 \right) + \frac{1}{2} \rho_3 (\varphi_{31,x_0})^2 + 2T_2 \eta_{21,x_0 x_1} \end{aligned}$$

на $z = h_2$

$$\rho_3 \varphi_{32,t_0} + \rho_3 \eta_{32} - T_3 \eta_{32,x_0 x_0} = -\rho_3 \varphi_{31,t_1} - \frac{1}{2} \rho_3 \left((\varphi_{31,x_0})^2 + (\varphi_{31,z})^2 \right) + 2T_3 \eta_{31,x_0 x_1} \text{ при}$$

$z = h_2 + h_3$

$$\varphi_{12,z} = 0 \text{ на } z = -h_1.$$

(20)

задача третьего приближения (при α^2)

$$\varphi_{j3,x_0 x_0} + \varphi_{j3,zz} = -\varphi_{11,x_1 x_1} - 2\varphi_{j1,x_0 x_2} - 2\varphi_{j2,x_0 x_1} \quad y, \Omega_j, \quad j = 1, 2, 3$$

$$\eta_{13,t_0} - \varphi_{j3,z} = -\eta_{11,t_2} - \eta_{12,t_1} - \eta_{11,x_0} \varphi_{j1,x_1} - \eta_{11,x_0} \varphi_{j2,x_0} - \eta_{11,x_1} \varphi_{j1,x_0} - \eta_{12,x_0} \varphi_{j1,x_0} \text{ на}$$

$z = 0, \quad j = 1, 2$

$$\eta_{23,t_0} - \varphi_{j3,z} = -\eta_{21,t_2} - \eta_{22,t_1} - \eta_{21,x_0} \varphi_{j1,x_1} - \eta_{21,x_0} \varphi_{j2,x_0} - \eta_{21,x_1} \varphi_{j1,x_0} - \eta_{22,x_0} \varphi_{j1,x_0}$$

на $z = h_2, \quad j = 2, 3$

$$\eta_{33,t_0} - \varphi_{33,z} = -\eta_{31,t_2} - \eta_{32,t_1} - \eta_{31,x_0} \varphi_{31,x_1} - \eta_{31,x_0} \varphi_{32,x_0} - \eta_{31,x_1} \varphi_{31,x_0} - \eta_{32,x_0} \varphi_{j1,x_0} \text{ на}$$

$z = h_2 + h_3$

$$\begin{aligned} \varphi_{13,t_0} - \rho_2 \varphi_{23,t_0} + (1 - \rho_2) \eta_{13} - T_1 \eta_{13,x_0 x_0} = & -\varphi_{12,t_1} - \varphi_{11,t_2} + \rho_2 (\varphi_{22,t_1} + \varphi_{21,t_2}) - \\ & - \frac{1}{2} \left(2\varphi_{11,x_0} \varphi_{12,x_0} + 2\varphi_{11,x_0} \varphi_{11,x_1} + 2\varphi_{11,z} \varphi_{12,z} \right) + \\ & + \frac{1}{2} \rho_2 \left(2\varphi_{21,x_0} \varphi_{22,x_0} + 2\varphi_{21,x_0} \varphi_{21,x_1} + 2\varphi_{21,z} \varphi_{22,z} \right) + \\ & + T_1 \left(2\eta_{12,x_0 x_1} + 2\eta_{11,x_0 x_2} + \eta_{11,x_1 x_1} \right) - \frac{3}{2} T_1 \left(\eta_{11,x_0} \right)^2 \eta_{11,x_0 x_0} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \rho_2 \varphi_{23,t_0} - \rho_2 \varphi_{33,t_0} + (\rho_2 - \rho_3) \eta_{23} - T_2 \eta_{23,x_0 x_0} = -\rho_2 (\varphi_{22,t_1} - \varphi_{21,t_2}) + \rho_3 (\varphi_{32,t_1} + \varphi_{31,t_2}) - \\
& - \frac{1}{2} \rho_2 (2\varphi_{21,x_0} \varphi_{22,x_0} + 2\varphi_{21,x_0} \varphi_{21,x_1} + 2\varphi_{21,z} \varphi_{22,z}) + \\
& + \frac{1}{2} \rho_3 (2\varphi_{31,x_0} \varphi_{32,x_0} + 2\varphi_{31,x_0} \varphi_{31,x_1} + 2\varphi_{31,z} \varphi_{32,z}) + \\
& + T_2 (2\eta_{22,x_0 x_1} + 2\eta_{21,x_0 x_2} + \eta_{31,x_1 x_1}) - \frac{3}{2} T_2 (\eta_{21,x_0})^2 \eta_{21,x_0 x_0} = 0 \\
& \rho_3 \varphi_{33,t_0} + \rho_3 \eta_{33} - T_3 \eta_{33,x_0 x_0} = -\rho_3 (\varphi_{32,t_1} + \varphi_{31,t_2}) - \\
& - \frac{1}{2} \rho_3 (2\varphi_{31,x_0} \varphi_{32,x_0} + 2\varphi_{31,x_0} \varphi_{31,x_1} + 2\varphi_{31,z} \varphi_{32,z}) + \\
& + T_3 (2\eta_{32,x_0 x_1} + 2\eta_{31,x_0 x_2} + \eta_{31,x_1 x_1}) - \frac{3}{2} T_2 (\eta_{31,x_0})^2 \eta_{31,x_0 x_0} = 0 \\
& \varphi_{13,z} = 0 \text{ на } z = -h_1. \tag{21}
\end{aligned}$$

Висновки. Отже, отримано задачі перших трьох наближень, невідомими в яких є функції $\eta_{11}, \eta_{21}, \eta_{31}, \eta_{12}, \eta_{22}, \eta_{32}, \eta_{13}, \eta_{23}, \eta_{33}, \varphi_{11}, \varphi_{21}, \varphi_{31}, \varphi_{12}, \varphi_{22}, \varphi_{32}, \varphi_{13}, \varphi_{23}, \varphi_{33}$, які визначають доданки багатомасштабних розвинень для потенціалів та відхилення поверхні контакту рідин і вільної поверхні.

Список літератури

1. Avramenko O. V., Naradovyi V. V., Selezov I. T. Conditions of Wave Propagation in a Two-Layer Liquid with Free Surface // Journal of Mathematical Sciences. – 2016. – 1, Vol. 212, Iss 2, - P. 131–141.
2. Avramenko O. V., Naradovyi V. V., Selezov I. T. Energy of Motion of Internal and Surface Waves in a Two-Layer Hydrodynamic System // Journal of Mathematical Sciences. – 2018. - Vol. 229, Iss3, - P. 241–252.
3. Vincze M., Bozoki T. Experiments on barotropic-baroclinic conversion and the applicability of linear n-layer internal wave theories // Cornell university library Physics. Fluid Dynamics. – 2017. – 2.
4. Ahmadi-Givi F., Nasr-Esfahany M., Mohebalhojeh A. R. Interaction of North Atlantic baroclinic wave packets and the Mediterranean storm track // Quarterly journal of the royal meteorological society. – 2014. - Vol. 140, Iss. 680. - P. 754-765.
5. Alias A., Grimshaw R.H.J., Khusnutdinov K.R. Coupled Ostrovsky Equations for Internal Waves, with a Background Shear Flow // Procedia IUTAM. –2018. - Vol. 11 – P. 3-14.
6. Goldobin D. S., Pimenova A. V., Kovalevskaya K. V., Lyubimov D. V., Lyubimova T. P. Running interfacial waves in a two-layer fluid system subject to longitudinal vibrations // Physical review journals. – 2015. - Vol. 91, Iss. 5.
7. Avramenko O.V., Naradovy V.V. Multiscale approximation of surface and internal waves interaction in two-layer fluid // Contemporary problems of natural sciences. – 2014. - Vol.1 (1) – P. 13-17.
8. Naradovy V., Avramenko O. Simulation of surface and internal wave-packets and wind waves in two-layered fluid // Naukovy zapysky. Series: Mathematical Sciences – 2016. – Vol. 74 – P. 62 – 66.

9. Xu CZ., Stastna M. On the interaction of short linear internal waves with internal solitary waves // *Nonlinear processes in geophysics*. – 2018. - Vol. 25, Iss. 1. - P. 1–17.
10. Perevalova E. G., Makarenko N. I. Stratification parameters and dispersion of internal solitary waves // *Journal of Physics Conference Series*. – 2016. Vol. 722.