

## СТОЯЧІ ХВИЛІ В ОБМЕЖЕНІЙ ДВОШАРОВІЙ РІДИНІ

Юрій Гуртовий, Валентин Єлькін

Науковий керівник: кандидат ф.-м. наук, доцент Гуртовий Ю.В.

Центральноукраїнський державний педагогічний університет імені

Володимира Винниченка, м. Кропивницький, Україна

*У статті проводиться дослідження стоячих внутрішніх хвиль у обмеженій двошаровій гідродинамічній рідкій системі з кінцевими товщинами шарів. Постановку проблеми виконано у безрозмірному вигляді. Для лінійної задачі отримані розв'язки для відхилення поверхні контакту двох шарів та для потенціалів швидкостей у верхньому та нижньому шарах. Показано, що граничні умови на бокових стінках рідин обмежують значення хвильових чисел до певного дискретного спектру. Виведена формула для частоти стоячої внутрішньої хвилі в залежності від фізичних параметрів системи кількості вузлів. Графічно зображено можливі форми стоячих хвиль, що містять декілька нерухомих точок*

*Ключові слова:* двошарова рідина, стоячі внутрішні хвилі, вузли і пучності.

### STANDING WAVES IN A LIMITED TWO-LAYER LIQUID

Yurii Hurtovyi, Valentin Yelkin

Supervisor: Ph.D., Senior Lecturer Hurtovyi Yu.V.

Volodymyr Vynnychenko Central Ukrainian State Pedagogical University, Kropyvnytskyi,  
Ukraine

*The article investigates standing internal waves in a limited two-layer hydrodynamic liquid system with finite layer thicknesses. The statement of the problem is made in dimensionless form. For the linear problem, solutions are obtained for the deviation of the contact surface of the two layers and for the velocity potentials in the upper and lower layers. It is shown that the boundary conditions on the side walls of liquids limit the values of wave numbers to a certain discrete spectrum. The formula for the frequency of a standing internal wave depending on the physical parameters of the system of the number of nodes is derived. The possible shapes of standing waves containing several fixed points are graphically represented.*

#### 1. Аналіз досліджень і публікацій.

Системи з шаруватою структурою охоплюють особливий клас об'єктів та процесів. Вивчення внутрішніх хвиль в таких системах має значний теоретичний і прикладний інтерес та є предметом багатьох досліджень. Аналіз фізичних характеристик внутрішніх хвиль у рідких системах різної густини актуальне при розробці відповідних технологій та пристроїв, що використовують енергію внутрішніх хвиль, або перетворюють її у електроенергію.

Із робіт, що опубліковані останнім часом про дослідження двошарових рідких систем, відмітимо наступні роботи. У роботі [1] наведені явища

відбивання і передачі водних хвиль через хвилеподібне проникне дно в двошаровій рідинній системі з використанням двовимірної лінеаризованої теорії, досліджено вплив поверхневого натягу на вільну поверхню включено в цю роботу. Показано залежність коефіцієнтів відбиття і пропускання, отриманих в термінах інтегралів, від функції форми хвилеподібного дна.

У дослідженні [2] дана двошарова система, покрита кригою, та проаналізоване явище відбиття і передачі водних хвиль у ній. Дно нижнього шару є хвилеподібним і проникним, а верхній шар покритий крижаним листом. Коефіцієнти відображення і передачі першого порядку визначаються за допомогою регулярного аналізу збурень та методу перетворень. Вони також залежать від проникності та форми хвилеподібного дна.

У роботі [3] досліджується новий адаптивний пристрій генерації енергії водної хвилі. Цей пристрій належить мікро-генератору енергії. Низько швидкісна енергія та енергія моменту обертання можна перетворити в електричну енергію, що може бути використана для зарядки літійового акумулятора, за допомогою верхніх та нижніх груп лопатей поглинача.

У статті [4] продемонстровано діелектричний еластомірний генератор, який може трансформувати енергію коливань, перенесену водними хвилями в електрику. Для побудови прототипу генератора використано поліакрілатну плівку, а експерименти проводились у штучному басейні, де можна генерувати запрограмованими дрібномасштабними хвилями на різних частотах і амплітудах. Результати вихідної потужності продемонстрували велику ефективність хвильових перетворювачів енергії на основі пружних ємнісних генераторів.

Отже, аналіз проблеми про дослідження внутрішніх хвиль у гідродинамічній системі «шар з твердим дном – шар з кришкою» є актуальний і відображений в багаточисленних публікаціях.

Нашою метою є дослідження поширення внутрішніх стоячих хвиль у двошаровій рідині скінченної товщини. Для досягнення мети поставлені наступні завдання:

- виконати математичну постановку задачі у безрозмірного вигляду;
- лінеаризувати та знайти розв'язки лінійної задачі;
- проаналізувати отримані розв'язки

## 2. Математична модель задачі.

Математична модель задачі про поширення хвильових пакетів уздовж поверхні контакту двох обмежених рідких шарів  $\Omega_1 = \{(x, z), 0 < x < l, -h_1 < z < 0\}$  та  $\Omega_2 = \{(x, z), 0 < x < l, 0 < z < h_2\}$  (рис.1)

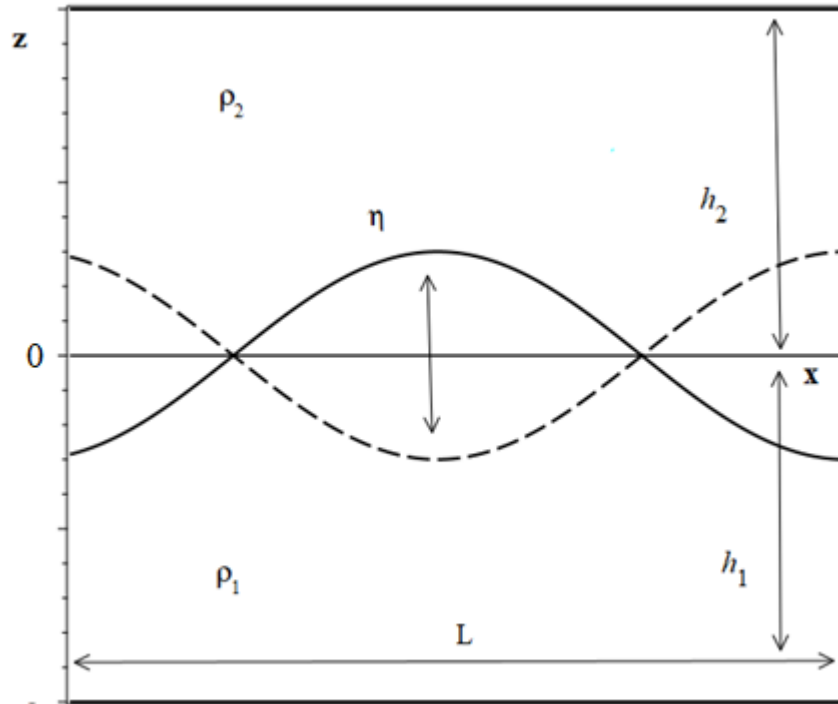


Рис.1 Двошарова обмежена рідина

У безрозмірному вигляді визначається системою диференціальних рівнянь в частинних похідних, яка містить рівняння Лапласа для потенціалів швидкостей в шарах  $\Omega_1$  і  $\Omega_2$

$$\frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial z^2} = 0; \quad j = 1, 2 \quad (1)$$

кінематичні умови на поверхні

$$\frac{\partial \eta}{\partial z} - \frac{\partial \varphi_j}{\partial z} = \alpha \frac{\partial \eta}{\partial x} \quad \text{при } z = \eta(x, z) \quad (2)$$

динамічну умову на поверхні контакту

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial t} - \rho \frac{\partial \varphi_2}{\partial t} + (1 - \rho)\eta + \frac{1}{2} \alpha [(\nabla \varphi_1)^2 - (\nabla \varphi_2)^2] - T \left[ 1 - \alpha^2 \left( \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \right) \right] \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} = 0 \quad (3)$$

при  $z = \eta(x, z)$

граничні умови на бокових стінках

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} = 0 \end{array} \right. \text{ при } x = 0 \qquad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} = 0 \end{array} \right. \text{ при } x = l \quad (4)$$

граничні умови на дні та кришці

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial z} = 0, \text{ при } z = -h_1, \text{ і } \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} = 0 \text{ при } z = h_2 \quad (5)$$

Швидкості у  $\Omega_j$ - виражені через градієнт потенціалу  $\varphi_j$ ,  $j=1, 2$ . Шари розділені поверхнею контакту  $z = \eta(x, t)$ . Враховується сила поверхневого натягу, сила тяжіння направлена перпендикулярно до поверхні розподілу у від'ємному  $z$ -напрямку, рідини вважаються нестисливими (рис 3.1).де  $\eta$  - відхилення поверхні контакту,  $\rho = \frac{\rho_2}{\rho_1}$  - відношення густин верхнього та нижнього рідких шарів,  $T$  – коефіцієнт поверхневого натягу.

### 3. Лінійна задача та її розв'язки.

Якщо амплітуда хвиль  $A$  буде набагато меншою за довжину шарів  $L$ , то коефіцієнт нелінійності можна вважати рівним нулю, причому система (1-5) стає лінійною. Розв'язок такої задачі одержуємо у вигляді стоячих хвиль:

$$\eta = A \cos(kx) \sin(\omega t), \quad (6)$$

Підстановка (6) в рівняння (1-2,5) дає значення потенціалів швидкостей нижнього і верхнього шарів у вигляді:

$$\varphi_1 = \omega k^{-1} A \cos(kx) \cos(\omega t) \frac{\text{ch}(k(h_1+z))}{\text{sh}(kh_1)} \quad (7)$$

$$\varphi_2 = -\omega k^{-1} A \cos(kx) \cos(\omega t) \frac{\text{ch}(k(h_2-z))}{\text{sh}(kh_2)}, \quad (8)$$

Підставляючи розв'язки (6-8) в останнє з рівнянь (3), отримуємо дисперсійне рівняння

$$\omega^2 = \frac{(1 - \rho + Tk^2)k}{\text{cth}(kh_1) + \rho \text{cth}(kh_2)}. \quad (9)$$

Дисперсійне співвідношення має такий самий вигляд як у випадку прогресивних хвиль [5].

Перевірка граничних умов на бокових стінках басейну (4) накладає обмеження на хвильове число стоячих хвиль:

$$k = \frac{\pi n}{L}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (10)$$

Тут натуральне число  $n$  показую кількість вузлів для кожної стоячої хвилі (рис.2).

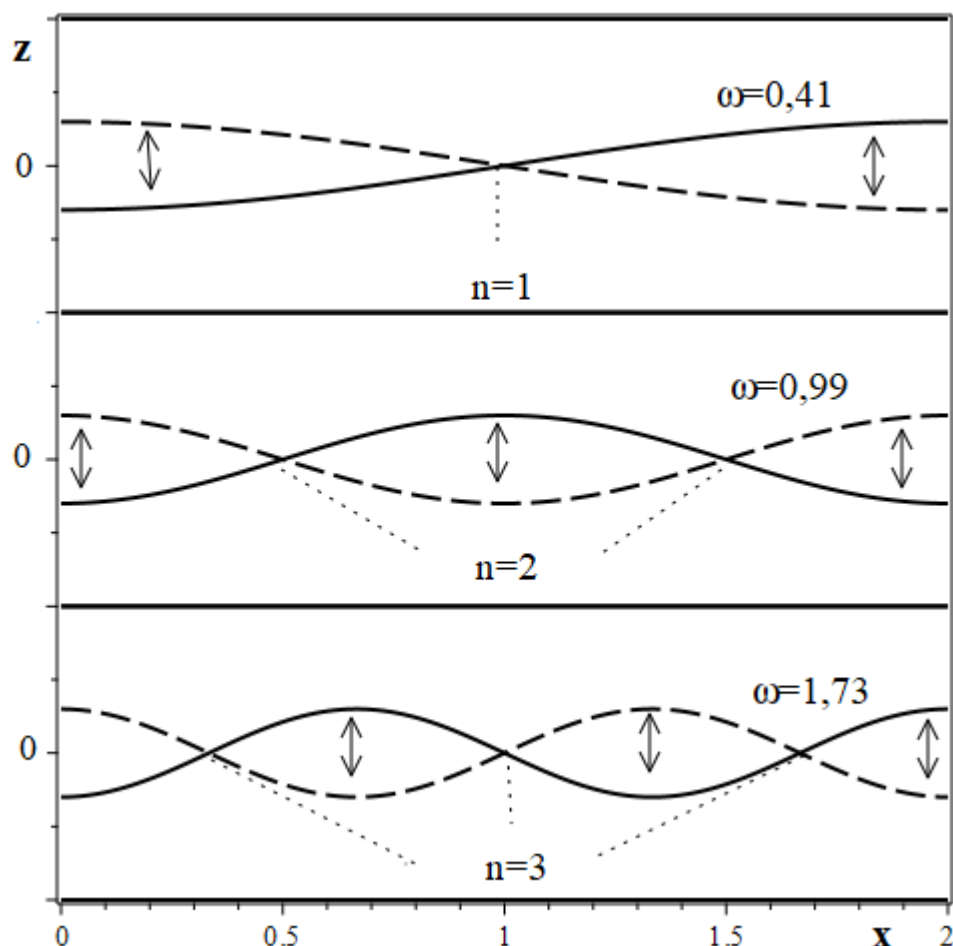


Рис.2 Стоячі хвилі у випадку одного, двох та трьох вузлів.

Підстановка (10) в (11) дає дискретний ряд частот, з якими коливається хвиля, що має  $n$  вузлів:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{\left(1 - \rho + \frac{\pi^2 n^2 T}{L^2}\right)L}{L\left(\coth\frac{\pi n h_1}{L} + \rho \coth\frac{\pi n h_2}{L}\right)}} \quad (11)$$

На рисунку 2 зображено стоячі хвилі для таких параметрів двошарової системи  $h_1 = h_2 = 1, L = 2, A = 0.3, \rho = 0.9, n \in \{1, 2, 3\}$ . В кожній стоячій хвилі є вузли – точки поверхні контакту, які залишаються нерухомими під час коливання стоячої хвилі. На рис.2 на них вказує штрихова лінія. Також є так звані

пучності – це точки контакту двох шарів, які коливаються з максимальною амплітудою. Всі точки крім вузлів межі розділу двох шарів коливаються з однаковою частотою, але з різними амплітудами. Якщо реалізована стояча хвиля з одним вузлом, то це буде середня точка поверхні контакту, а максимальна амплітуда коливань буде відбуватись біля бокових стінок басейну. Частота коливань такої хвилі  $\omega = 0.41$  визначається фізичними параметрами двошарової рідини і є найменшою серед усіх можливих стоячих хвиль. Стояча хвиля з двома вузлами коливається лише з частотою  $\omega = 0.99$ , які більша більше ніж в двічі за початкову. Внутрішня стояча хвиля з трьома вузлами має частоту  $\omega = 1.73$ . На практиці може реалізовуватись накладання стоячих хвиль з різною кількістю вузлів. Враховуючи дисперсійне співвідношення (11) можна зробити висновок, що частоти коливання стоячих хвиль належать до дискретного спектру і можуть набувати лише певних значень.

#### **4.Висновки**

Отже, у даній статті було досліджено проблему поширення внутрішніх стоячих хвиль у обмеженій гідродинамічній системі «шар – шар». Постановка задача була здійснена для ідеальних рідин та містить рівняння Лапласа, кінематичні то динамічні умови рівноваги, а також граничні умови на дні і кришці та бокових стінках. Розв'язки задачі були отримані для довгих хвиль, що дозволило лінеаризувати побудовану математичну модель. Були проаналізовані фізичні параметри можливих стоячих хвиль та побудовані відхилення поверхні контакту двох шарів для конкретної двошарової гідродинамічної системи для випадку одного, двох та трьох вузлів.

#### **Список літератури**

1. Panda, S. and S. C. Martha Water-waves Scattering by Permeable Bottom in Two-layer Fluid in the Presence of Surface Tension. // Mathematical modelling and analysis – 2017. - 22(6). - P. 827-851
2. Panda S. Oblique Wave Scattering by An Undulating Porous Bottom in A Two-Layer Ice-Covered Fluid. // China ocean engineering – 2016. - 30(3). - P. 431-446.

3. Panda S. Oblique Wave Scattering by An Undulating Porous Bottom in A Two-Layer Ice-Covered Fluid // China ocean engineering – 2016. - 130(3). - P. 431-446.
4. Moretti, G., G. P. Papini Rosati, M. Righi and M. Fontana Resonant wave energy harvester based on dielectric elastomer generator // Smart Materials and Structures is a multi-disciplinary journal – 2018. - 27(3). - P. 1-35.
5. Selezov, I.T., Avramenko, O.V., Gurtovy, Yu.V. Features of wave-packet propagation in two-layer fluid of finite depth. // International Journal of Fluid Mechanics Research – 2007. - 34(5). - P. 475-491.