УДК 519.21

ОЦІНКА АСИМПТОТИКИ ЗБІЖНОСТІ В ЗАКОНІ ВЕЛИКИХ ЧИСЕЛ З ПУАССОНІВСЬКИМИ ДОДАНКАМИ

Макарчук Олег, Халецький Богдан

Науковий керівник: канд.-ф.-м. наук, доцент Макарчук О.П.

Центральноукраїнський державний педагогічний університет імені Володимира Винниченка, м. Кропивницький, Україна

Анотація. В статті представлено оцінки асимптотики збіжності в законі великих чисел для випадкових послідовностей з дискретно розподіленими пуассонівськими доданками. Акцент здійснюється на випадок, коли доданки випадкової послідовності є незалежними в сукупності випадковими величинами, що мають пуассонівський розподіл з параметром 2. Відповідний результат поглиблює класичні оцінки, отримані на основі нерівності Чебишева і можуть бути використані для побудови довірчих статистичних інтервалів.

Ключові слова: закони великих чисел, ймовірнісна нерівність Чебишева, дискретний ймовірнісний розподіл, функція розподілу, розподіл Пуассона, математичне сподівання.

Assessment of asymptotics of convergence in the law of large numbers with puasson additives

O Makarchuk, B Khaletsky

Scientific supervisor: Candidate of Physics and Mathematics Science Makarchuk O.P.

Volodymyr Vynnychenko Ukrainian State Pedagogical University, Kropyvnystky, Ukraine

Annotation. The paper presents estimates of the asymptotics of convergence in the law of large numbers for random sequences with discretely distributed Poisson terms. Emphasis is placed on the case when the terms of a random sequence are a set of random variables that have a Poisson distribution with parameter 2. The corresponding result deepens the classical *estimates obtained on the basis of Chebyshev inequality and can be used to construct confidence intervals.*

Keywords: laws of large numbers, Chebyshev probability inequality, discrete probability distribution, distribution function, Poisson distribution, mathematical expectation.

1. Постановка проблеми.

Поняття збіжної послідовності як одного з фундаментальних понять математичного аналізу є математично чітко формалізованим в розумінні означення. В теорії ймовірностей ситуація кардинально змінюється по відношенню до послідовності випадкових величин, заданих на одному ймовірнісному просторі. Для послідовностей випадкових величин, розрізняють різні типи збіжностей. Основними з них є: збіжність за ймовірністю, збіжність з ймовірністю 1,збіжність за розподілом та збіжність в термінах середнього квадратичного (середнього k-ого степеневого). Класичним асимптотичним ймовірнісним законом по відношенню до збіжності за ймовірністю є закон великих чисел. Цілком природним бажанням є встановлення оцінок збіжності в законах великих чисел, що крім математичного інтересу дозволяє використовувати відповідні оцінки в статистиці, зокрема для побудови довірчих інтервалів. Як показує аналіз, класична оцінка на основі нерівності Чебишева дає лише доволі грубі оцінки, які зрозуміло, що необхідно поглибити.

Робота присвячена вивченню збіжності за ймовірністю в контексті поглиблення закону великих чисел для випадкових величин, що мають дискретний пуассонівський розподіл.

Об'єкт дослідження: закон великих чисел.

Предмет дослідження: оцінки асимптотики збіжності в законі великих чисел для дискретно розподілених пуасонівських випадкових величин.

Мета дослідження: оцінити асимптотику збіжності в законі великих чисел для пуассонівського розподілу в контексті класичної оцінки, на основі нерівності Чебишева.

Результати дослідження може бути використані при уточненні довірчих інтервалів статистичних критерії, породжених дискретними та абсолютно неперервними розподілами.

2. Оцінка асимптотики збіжності в ЗВЧ для розподілу Пуассона.

Розглянемо розподіл Пуассона з параметром 2. У цьому випадку відповідно

$$\xi \in \Pi_2$$

Випадкова величина набуває значень

$$0, 1, 2, \ldots, n, \ldots$$

з ймовірностями

$$\frac{2^0}{0!} \cdot e^{-2}, \frac{2^1}{1!} \cdot e^{-2}, \frac{2^2}{2!} \cdot e^{-2}, \ldots, \frac{2^n}{n!} \cdot e^{-2}, \ldots$$

відповідно.

У цьому випадку таблиця розподілу має вигляд.

ξ	0	1	$\ldots$	n	$\ldots$
	$\frac{2^0}{0!} \cdot e^{-2}$	$\frac{2^1}{1!} \cdot e^{-2}$	$\ldots$	$\frac{2^n}{n!} \cdot e^{-2}$	$\ldots$

Добре відомо [1, с 25], що

$$M(\xi) = \lambda$$

та

$$D(\xi) = \lambda.$$

Тому у нашому випадку маємо:

$$M(\xi) = 2$$

та

$$D(\xi) = 2.$$

Побудуємо функцію розподілу для відповідної випадкової величини:

Маємо:

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0, x \in (-\infty; 0] \\ 0{,}1353, \quad\quad x \in (0; 1] \\ 0{,}1353 + 0{,}2706, x \in (1; 2] \\ 0{,}1353 + 0{,}2706 + 0{,}2706, x \in (2; 3] \\ 0{,}1353 + 0{,}2706 + 0{,}2706 + 0{,}1804, x \in (3; 4] \\ \ldots \end{cases}$$

В спрощеному вигляді маємо:

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0, x \in (-\infty; 0] \\ 0{,}1353, \quad\quad x \in (0; 1] \\ 0{,}4059, x \in (1; 2] \\ 0{,}6765, x \in (2; 3] \\ 0{,}8569, x \in (3; 4] \\ \ldots \end{cases}$$

Якщо $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ – послідовність однаково розподілених незалежних в сукупності випадкових величин, причому $M(|\xi_1|) < +\infty$,то

$$\frac{\xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_n}{n} \xrightarrow{P} M(\xi_1).$$

Використовуючи нерівність Чебишева, можливо отримати наступну класичні оцінку:

$$P(|\frac{\xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_n}{n} - M(\xi_1)| \geq t) \leq \frac{D(\xi_1)}{nt^2}$$

Позначимо функцію:

$$g_n(t) = nt^2 P(|\frac{\xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_n}{n} - M(\xi_1)| \geq t)$$

Розглянемо наступні величини:

$$A(n) = \sup_{t \in R} g_n(t),$$

$$A = \sup_{n \in N} A(n),$$

тоді можливо отримати наступне поглиблення класичної оцінки:

$$P\left(\left|\frac{\xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_n}{n} - M(\xi_1)\right| \geq t\right) \leq \frac{A}{nt^2}, \forall t \in (0; +\infty).$$

Позначивши

$$\psi_n = \xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_n,$$

отримаємо:

$$P\left(\left|\frac{\xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_n}{n} - M(\xi_1)\right| \geq t\right) = 1 - P(\psi_n \leq nM(\xi_1) + nt) +$$

$$+P(\psi_n \leq nM(\xi_1) - nt) = 1 - F_{\psi_n}(nM(\xi_1) + nt) + F_{\psi_n}(nM(\xi_1) - nt),$$

Таким чином,

$$g_n(t) = nt^2 P\left(\left|\frac{\xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_n}{n} - M(\xi_1)\right| \geq t\right) =$$

$$= nt^2 \left(1 - F_{\psi_n}(nM(\xi_1) + nt) + F_{\psi_n}(nM(\xi_1) - nt)\right).$$

Для розподілу Пуассона з параметром 2 ЗВЧ з оцінкою Чебишева має вигляд:

$$P\left(\left|\frac{\xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_n}{n} - 2\right| \geq t\right) \leq \frac{2}{nt^2}, \forall t \in (0; +\infty).$$

Отож, при $n = 2$, маємо наступну функцію

$$g_2(t) = 2t^2 \left(1 - F_{\psi_2}(4 + 2t) + F_{\psi_2}(4 - 2t)\right),$$

де

$$\psi_2 = \xi_1 + \xi_2.$$

Зрозуміло, що

$$\xi_1 + \xi_2 \in \Pi_4$$

Для аналізу розглянемо три випадки.

1. Якщо, $t \in (0; 0{,}5]$. Маємо:

$$g_2(t) = 2t^2(1 - F_{\psi_2}(4) + F_{\psi_2}(3)) \leq 2 \cdot 0{,}5^2 \cdot (1 - F_{\psi_2}(4) + F_{\psi_2}(3)) \approx 0{,}9$$

Якщо, $t \in (0{,}5; 1]$. Маємо:

$$g_2(t) = 2t^2(1 - F_{\psi_2}(5) + F_{\psi_2}(2)) \leq 1{,}1$$

Якщо, $t \in (1; 1{,}5]$. Маємо:

$$g_2(t) = 2t^2(1 - F_{\psi_2}(6) + F_{\psi_2}(1)) \leq 1{,}2$$

Якщо, $t \in (1{,}5; 2]$. Маємо:

$$g_2(t) = 2t^2(1 - F_{\psi_2}(7) + F_{\psi_2}(0)) \leq 1{,}52$$

1. Якщо, $t > 2$. Маємо:

$$F_{\psi_2}(4 - 2t) = 0.$$

Нехай

$$t \in (\frac{k}{2}; \frac{k+1}{2}]$$

$$g_2(t) = 2t^2 \left(1 - F_{\psi_2}(k+4)\right) \leq 2\frac{k^2}{4}\left(1 - \sum_{j=0}^{k+4} \frac{e^{-4}4^n}{n!}\right).$$

Використовуючи залишковий член у формі Лагранжа для розкладу Тейлора для експоненти маємо:

$$2\frac{k^2}{4}\left(1 - \sum_{j=0}^{k+4} \frac{e^{-4}4^n}{n!}\right) \leq \frac{k^2}{2} \cdot \frac{e^{-4} \cdot 4^{k+5}}{(k+5)!}$$

Нагадаємо, що

$$e^x = 1 + \cdots + \frac{x^n}{n!} + r_n(x)$$

$$r_n(x) = \frac{e^c \cdot c^{n+1}}{(n+1)!}$$

$$|c| \leq |x|.$$

Потрібно відзначити, що у нашому випадку

$$k > 4$$

а тому

$$k + 5 > 9$$

Використовуючи сервіс, можливо оцінити відповідну величину.

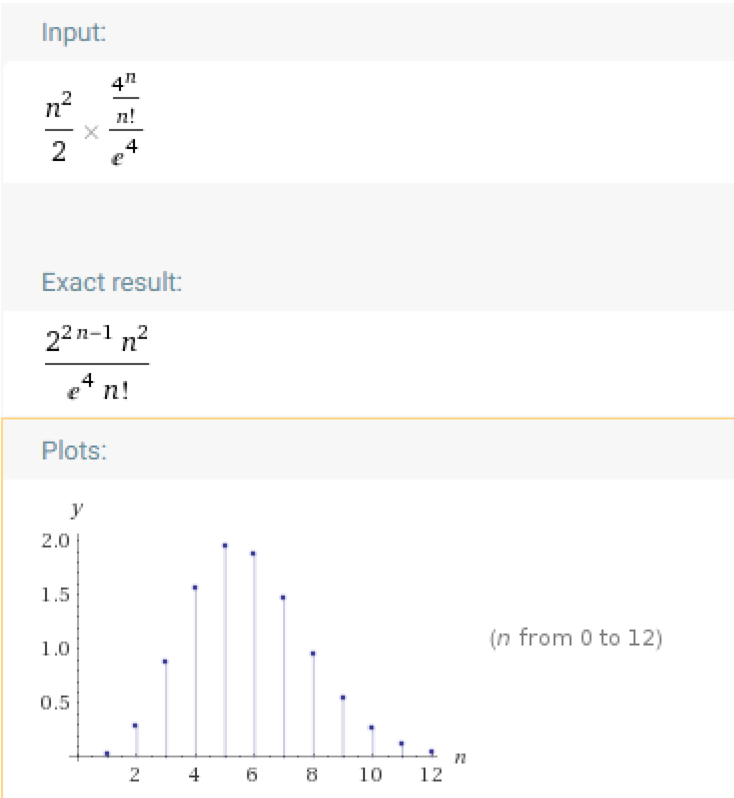

Рис 1. Оцінка величини $\frac{k^2}{2} \cdot \frac{e^{-4} \cdot 4^{k+5}}{(k+5)!}$.

Таким чином, можливо зробити висновок, що

$$A(2) = 1{,}52.$$

В подальшому повторюємо відповідні обрахунки для інших значень n. Зрозуміло, що для достатньо великих значень номерів n відповідні обрахунки стають достатньо аналітично складними.

Таблиця 1.Значення $sup_R\, g_n(t)$ для пуасонівського розподілу.

n	$\sup_R g_n(t)$
2	1,52
3	1,51
4	1,5092
5	1,5084

Висновки. У даному випадку прослідковується консолідації значень біля сталої 1,5, що дозволяє зробити стверджувати, що для стандартного розподілу Пуассона з параметром 2 можливо вказати наступну асимптотику збіжності в законі великих чисел:

$$P\left(\left|\frac{\xi_1+\xi_2+\cdots+\xi_n}{n}-M(\xi_1)\right|\geq t\right)\leq\frac{A}{nt^2},\forall t\in(0;+\infty).$$

де стала A дорівнює 1,5 і покращує оцінку Чебишева з сталою 2.

Список літератури

1. Булинский А.В., Шашкин А.П. Предельные теоремы для ассоциированных случайных полей и родственных систем. Монография. – М: Физматлит, 2008. – 480 с.

2. Буре В.М., Парилина Е.М., Седаков А.А. Теория вероятностей и вероятностные модели. М.: Лань, 2018. – 295 с.

3. Васильева Э.К., Сорокина Ю.И. Теория выборки и оценка рисков. Учебное пособие. – СПб.: СПбГЭУ, 2016. – 160 с.

4. Володин И.Н., Симушкин С.В. Лекции по теории вероятностей и математической статистике. Учебник. – Казань: Казанский федеральный университет (КФУ), 2019. – 347 с.
5. Кельберт М.Я., Сухов Ю.М. Марковские цепи как отправная точка теории случайных процессов и их приложения. Москва: Московский центр непрерывного математического образования, 2009. – 588 с.