УДК 532.5

ДИНАМІЧНЕ РІВНЯННЯ ВИПАДКОВИХ АМПЛІТУД НА ПОВЕРХНІ РІДКОГО ПІВПРОСТОРУ

Віктор Туртуріка

Науковий керівник: доктор ф.-м. наук, професор Авраменко О.В.

Центральноукраїнський державний педагогічний університет імені Володимира Винниченка, м. Кропивницький, Україна

В статті описано дослідження поширення випадкових поверхневих гравітаційних хвиль ідеальної нестисної рідини у тривимірному півпросторі. Оскільки поля відхилень, потенціалів швидкостей і атмосферного тиску на вільній поверхні відповідають умовам квазіоднорідності та квазістаціонарності, вони були представлені для дослідження у вигляді розкладів в інтегралах Фур'є-Стилтьєса. Отримано динамічне рівняння в інтегральній формі для стохастичної амплітуди поля відхилень через розвинення у ряд за малим параметром. Проведено додаткову симетризацію для деякий доданків підінтегральних функцій трьох хвильової взаємодії.

Ключові слова: Випадкові гравітаційні хвилі, динамічне рівняння, ряди Фур'є-Стілтьєса.

Dynamic equation of random amplitudes on the surface of a liquid half-space

V. Turturika

Scientific supervisor: Doctor of Physics and Mathematics Sciences, Professor Avramenko O.V.

Volodymyr Vynnychenko Central Ukrainian State Pedagogical University, Kropyvnytsky, Ukraine

The paper describes the study of the propagation of random surface gravitational waves of an ideal incompressible fluid in a three-dimensional half-space. Since the fields of deviations, velocity potentials, and atmospheric pressure on the free surface correspond to the conditions of quasi-homogeneity and quasi-stationarity, they were presented for the study in the form of expansions in Fourier-Stiltjes integrals. A dynamic equation in integral form for the stochastic amplitude of the field of deviations due to development in a series by a small parameter is obtained. Additional symmetrization is performed for some terms of the subintegral functions of the three-wave interaction

*Keywords: Random gravitational waves, dynamic equation, Fourier-Stilties series***.**

Практичний інтерес дослідження хвильових рухів викликаний сучасними потребами розробки нових методів гасіння хвиль, нових способів отримання енергії, а також конструюванням водного транспорту. Модель випадкових хвильових рухів досить точно описує реальні хвильові процеси, які відбуваються всередині та на поверхні рідкого шару, що в свою чергу обумовлює актуальність її дослідження.

Нелінійній взаємодії випадкових поверхневих хвиль океану присвячена стаття [3]. У рамках слабконелінійної теорії отримано динамічне рівняння для взаємодій двох та трихвильових поверхневих статистичних полів у рідкому півпросторі.

У статті [2] описана інтерферометрія випадкових поверхневих гравітаційних хвиль та досліджена експериментально з використанням дослідження океанських хвиль. Моделювання та вимірювання хвильового пакету добре узгоджуються з теоретичними результатами, але взаємні кореляції, засновані на вимірах океану, не дають передбаченої структури. В статті наводять можливі пояснення.

Метою статті є дослідження поширення внутрішніх випадкових хвиль у тривимірному рідкому півпросторі. Для досягнення мети поставлені наступні завдання:

– виконати математичну постановку задачі у безрозмірного вигляду;
– застосувати до поставленої задачі метод випадкових амплітуд;
– провести симетризацію доданків отриманого рівняння для випадкових амплітуд.

Досліджується задача про поширення випадкових поверхневих хвиль у тривимірному рідкому півпросторі $\Omega=\left\{ (x, y, z) | -\infty \leq x, y \leq +\infty; z \leq 0 \right\}$ густиною ρ. Позначимо $z = \eta(\vec{x}, t)$ – поле відхилення вільної поверхні, $\vec{x}= (x, y)$, P – поле тиску на поверхні. Сила тяжіння направлена перпендикулярно поверхні у від’ємному z-напрямку, рідина вважаються нестисливою.

Швидкість поширення пакетів рідини задається як повний потенціал $\varphi(\vec{x},\ z,\ t)$ поля течії $u(\vec{x}, z, t)$ та має задовольняти рівняння

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = 0 \tag{1}$$

динамічна умова

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \alpha\frac{1}{2}[(\frac{\partial\varphi}{\partial x})^2 + (\frac{\partial\varphi}{\partial y})^2 + (\frac{\partial\varphi}{\partial z})^2] = -\eta - P, \text{ при } z=\alpha\eta \tag{2}$$

кінематична умова

$$\frac{\partial\eta}{\partial t} + \alpha[(\frac{\partial\eta}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial x}) + (\frac{\partial\eta}{\partial y}\frac{\partial\varphi}{\partial y})] = \frac{\partial\varphi}{\partial z}, \text{ при } z = \alpha\eta \tag{3}$$

гранична умова

$$\varphi(\vec{x}, t) = 0, \text{ при } z \to -\infty \tag{4}$$

тут α – малий параметр.

Для розв’язку застосовується розвинення усіх випадкових полів у ряди Фур’є-Стілтьєса в наступному вигляді:

$$\eta(\vec{x},t)=\int\exp(i\chi)B_q\mathrm{d}\vec{q},\quad \varphi(\vec{x},z,t)=\int\exp(i\chi+|\vec{k}|z)A_q\mathrm{d}\vec{q},\quad \mathrm{P}(\vec{x},t)=\int\exp(i\chi)C_q\mathrm{d}\vec{q} \qquad (5)$$

тут $\chi=\vec{k}\vec{x}-\omega t$ – фазова зміна, $\vec{k}=(k_x,k_y)$– горизонтальний хвильовий вектор, $k=|\vec{k}|$ – модуль хвильового вектора (хвильове число), $q=(\vec{k},\omega)$ – узагальнена фазова змінна Фур’є розвинення, для диференціалу якого прийнято позначення $dq=d\vec{k}\omega$. Величини $A_q\equiv A(q)$, $B_q\equiv B(q)$ та $C_q\equiv C(q)$ – стохастичні амплітуди відповідних полів [1] [3]. Тут і далі застосовуємо інтегрування на проміжках $(-\infty,+\infty)$.

Підставимо розвинення (5) в динамічну умову (2), домножимо на $\exp(-i(\vec{k}'\vec{x}-$ $-\omega' t))$ та проінтегруємо по $\vec{q}'$ на $(-\infty,+\infty)$ Після перетворень з урахуванням властивості функції Дірака $\int\delta(\vec{x}-\vec{a})\mathrm{f}(\vec{x})\mathrm{d}\vec{x}=\mathrm{f}(\vec{a})$, отримаємо

$$\begin{gathered}-i\omega A_q+\alpha\int -i\omega_1|\overrightarrow{k_1}|A_{q_1}B_{q-q_1}\mathrm{d}\overrightarrow{q_1}+\alpha^2\tfrac{1}{2}\iint -i\omega_1|\overrightarrow{k_1}|^2A_{q_1}B_{q_2}B_{q-q_1-q_2}\mathrm{d}\overrightarrow{q_1}\mathrm{d}\overrightarrow{q_2}+\\ +\alpha\tfrac{1}{2}\int(-\overrightarrow{k_1}(\vec{k}-\overrightarrow{k_1})+|\overrightarrow{k_1}||\vec{k}-\overrightarrow{k_1}|)A_{q_1}A_{q-q_1}\mathrm{d}\overrightarrow{q_1}+\\ +\alpha^2\tfrac{1}{2}\iint(-\overrightarrow{k_1}\overrightarrow{k_2}+|\overrightarrow{k_1}||\overrightarrow{k_2}|)(|\overrightarrow{k_1}|+|\overrightarrow{k_2}|)A_{q_1}A_{q_2}B_{q-q_1-q_2}\mathrm{d}\overrightarrow{q_1}\mathrm{d}\overrightarrow{q_2}+\cdots=-B_q-C_q.\end{gathered} \qquad (6)$$

Аналогічно з кінематичної умови (3) отримаємо

$$\begin{gathered}-i\omega B_q+\alpha\int -\overrightarrow{k_1}(\vec{k}-\overrightarrow{k_1})A_{q_1}B_{q-q_1}\mathrm{d}\overrightarrow{q_1}+\alpha^2\iint -\overrightarrow{k_1}\overrightarrow{k_2}|\overrightarrow{k_1}|A_{q_1}B_{q_2}B_{q-q_1-q_2}\mathrm{d}\overrightarrow{q_1}\mathrm{d}\overrightarrow{q_2}+\cdots=\\ =|\vec{k}|A_q+\alpha\int|\overrightarrow{k_1}|^2A_{q_1}B_{q_2}\mathrm{d}\overrightarrow{q_1}+\alpha^2\tfrac{1}{2}\iint|\overrightarrow{k_1}|^3A_{q_1}B_{q_2}B_{q-q_1-q_2}\mathrm{d}\overrightarrow{q_1}\mathrm{d}\overrightarrow{q_2}.\end{gathered} \qquad (7)$$

Запишемо (6) та (7) у вигляді системи

$$-i\omega A_q+B_q=-C_q+\Sigma(\vec{q}), \qquad (8)$$

$$i\omega B_q+|\vec{k}|A_q=\Pi(\vec{q}), \qquad (9)$$

де

$$\begin{gathered}\Sigma(\vec{q})=\alpha\int\{i\omega_1|\overrightarrow{k_1}|A_{q_1}B_{q-q_1}+\tfrac{1}{2}(\overrightarrow{k_1}(\vec{k}-\overrightarrow{k_1})-|\overrightarrow{k_1}||\vec{k}-\overrightarrow{k_1}|)A_{q_1}A_{q-q_1}\}\mathrm{d}\overrightarrow{q_1}+\\ +\alpha^2\tfrac{1}{2}\iint\{i\omega_1|\overrightarrow{k_1}|^2A_{q_1}B_{q_2}B_{q-q_1-q_2}+(\overrightarrow{k_1}\overrightarrow{k_2}-|\overrightarrow{k_1}||\overrightarrow{k_2}|)(|\overrightarrow{k_1}|+|\overrightarrow{k_2}|)A_{q_1}A_{q_2}B_{q-q_1-q_2}\}\mathrm{d}\overrightarrow{q_1}\mathrm{d}\overrightarrow{q_2},\end{gathered} \qquad (10)$$

$$\begin{gathered}\Pi(\vec{q})=-\alpha\int\{|\overrightarrow{k_1}|^2+\overrightarrow{k_1}(\vec{k}-\overrightarrow{k_1})\}A_{q_1}B_{q-q_1}\mathrm{d}\overrightarrow{q_1}-\\ -\alpha^2\iint\{\tfrac{|\overrightarrow{k_1}|^3}{2}+\overrightarrow{k_1}\overrightarrow{k_2}|\overrightarrow{k_1}|\}A_{q_1}B_{q_2}B_{q-q_1-q_2}\mathrm{d}\overrightarrow{q_1}\mathrm{d}\overrightarrow{q_2}.\end{gathered} \qquad (11)$$

Амплітуду A_q представимо у вигляді ряду по малій змінній α

$$A_q=\mathrm{A}_1(\vec{q})+\alpha\mathrm{A}_2(\vec{q})+\alpha^2\mathrm{A}_2(\vec{q})+\cdots. \qquad (12)$$

Підстановка (12) в (11) та прирівнювання коефіцієнтів при однакових степенях α дає наступні співвідношення

$$\mathrm{A}_1(\vec{q}) = -\frac{i\omega B_q}{|\vec{k}|}, \tag{13}$$

$$\mathrm{A}_2(\vec{q}) = \int \frac{i\omega_1}{|\vec{k}||\overrightarrow{k_1}|}[|\overrightarrow{k_1}|^2 + \overrightarrow{k_1}(\vec{k} - \overrightarrow{k_1})]B_{q_1}B_{q-q_1}\mathrm{d}\overrightarrow{q_1}, \tag{14}$$

$$\mathrm{A}_3(\vec{q}) = \iint \{(\frac{|\overrightarrow{k_1}|^2}{2} + \overrightarrow{k_1}\overrightarrow{k_2})\omega_1 - \frac{\vec{k}(\overrightarrow{k_1}+\overrightarrow{k_2})(|\overrightarrow{k_2}|^2+\overrightarrow{k_1}\overrightarrow{k_2})}{|\overrightarrow{k_2}||\overrightarrow{k_1}+\overrightarrow{k_2}|}\omega_2\}\frac{i}{|\vec{k}|}B_{q_1}B_{q_2}B_{q-q_1-q_2}\mathrm{d}\overrightarrow{q_1}\mathrm{d}\overrightarrow{q_2} \tag{15}$$

Підставимо (13) – (15) в (8) та згрупуємо доданки за степенями α. Перед підстановкою та зведенням для α^1 проведемо додаткову симетризацію для $\mathrm{A}_2(\vec{q})$ та першого доданку $\Sigma(\vec{q})$.

$$A_2(\vec{q}) = \int \frac{i\omega_1}{|\vec{k}||\overrightarrow{k_1}|}[|\overrightarrow{k_1}|^2 + \overrightarrow{k_1}(\vec{k} - \overrightarrow{k_1})]B_{q_1}B_{q-q_1}d\overrightarrow{q_1} =$$

$$= \frac{1}{2}\int \{i\omega_1\frac{|\overrightarrow{k_1}|^2 + \overrightarrow{k_1}(\vec{k} - \overrightarrow{k_1})}{|\vec{k}||\overrightarrow{k_1}|} - i(\omega - \omega_1)\frac{(\vec{k} - \overrightarrow{k_1})^2 + (\vec{k} - \overrightarrow{k_1})(\vec{k} - (\vec{k} - \overrightarrow{k_1}))}{|\vec{k}||\vec{k} - \overrightarrow{k_1}|}\}B_{q_1}B_{q-q_1}d\overrightarrow{q_1}$$

Для чисельника другого доданку маємо

$$\begin{gathered}(\vec{k} + (\vec{k} - \overrightarrow{k_1})(\vec{k} - (\vec{k} - \overrightarrow{k_1})) = \\ = (\vec{k} + (\vec{k} - \overrightarrow{k_1})\overrightarrow{k_1} = \\ = \vec{k}^2 - 2\vec{k}\overrightarrow{k_1} + \overrightarrow{k_1}^2 + \vec{k}\overrightarrow{k_1} - \overrightarrow{k_1}^2 = \\ = \vec{k}^2 - \vec{k}\overrightarrow{k_1} = \vec{k}(\vec{k} - \overrightarrow{k_1})\end{gathered}$$

Остаточно симетризоване $\mathrm{A}_2(\vec{q})$

$$A_2(\vec{q}) = \frac{1}{2}\int \{\frac{\vec{k}\overrightarrow{k_1}}{|\vec{k}||\overrightarrow{k_1}|}\omega_1 - \frac{\vec{k}(\vec{k}-\overrightarrow{k_1})}{|\vec{k}||\vec{k}-\overrightarrow{k_1}|}(\omega - \omega_1)\}iB_{q_1}B_{q-q_1}d\overrightarrow{q_1} \tag{16}$$

Аналогічно для першого доданку $\Sigma(\vec{q})$.маємо

$$\int i\omega_1|\overrightarrow{k_1}|A_{q_1}B_{q-q_1}d\overrightarrow{q_1} = \frac{1}{2}\int \{i\omega_1|\overrightarrow{k_1}|A_{q_1}B_{q-q_1} - i(\omega - \omega_1)|\vec{k} - \overrightarrow{k_1}|A_{q-q_1}B_{q_1}\}d\overrightarrow{q_1} \tag{17}$$

Враховуючи (16) – (17) підставимо (13) – (15) в (8) та згрупуємо доданки із $\alpha < 2$

$$\begin{gathered}-\frac{\omega^2}{|\vec{k}|}B_q + \alpha\frac{1}{2}\int \{\frac{\vec{k}\overrightarrow{k_1}}{|\vec{k}||\overrightarrow{k_1}|}\omega\omega_1 - \frac{\vec{k}(\vec{k} - \overrightarrow{k_1})}{|\vec{k}||\vec{k} - \overrightarrow{k_1}|}\omega(\omega - \omega_1)\}B_{q_1}B_{q-q_1}d\overrightarrow{q_1} + B_q + C_q = \\ -\alpha\frac{1}{2}\int \omega_1^2 B_{q_1}B_{q-q_1}d\overrightarrow{q_1} - \alpha\frac{1}{2}\int (\omega - \omega_1)^2 B_{q_1}B_{q-q_1}d\overrightarrow{q_1} + \\ +\alpha\frac{1}{2}\int \frac{\overrightarrow{k_1}(\vec{k} - \overrightarrow{k_1}) - |\overrightarrow{k_1}||\vec{k} - \overrightarrow{k_1}|}{|\overrightarrow{k_1}||\vec{k} - \overrightarrow{k_1}|}\omega_1(\omega - \omega_1)B_{q_1}B_{q-q_1}d\overrightarrow{q_1}\end{gathered}$$

Запишемо отриманий результат у формі

$$(1 - \frac{\omega^2}{|\vec{k}|})B_q + C_q = \alpha\int f_2(\vec{q},\overrightarrow{q_1})B_qB_{q-q_1}d\overrightarrow{q_1}$$

Де $f_2(\vec{q},\overrightarrow{q_1})$ дорівнює

$$\mathrm{f}_2(\vec{q},\overrightarrow{q_1}) = \frac{1}{2}[\omega(\omega-\omega_1) < \vec{k},\vec{k}-\overrightarrow{k_1} > -\omega\omega_1 < \vec{k},\overrightarrow{k_1} > -\omega_1^2 - \omega^2 +$$
$$+\omega\omega_1 + < \overrightarrow{k_1},\vec{k}-\overrightarrow{k_1} > \omega_1(\omega-\omega_1)],$$

де $< \vec{k},\overrightarrow{k_1} >= \frac{\vec{k}\overrightarrow{k_1}}{|\vec{k}||\overrightarrow{k_1}|}$ косинус кута між векторами $\vec{k}$ та $\overrightarrow{k_1}$.

Аналогічно підставимо (13) – (15) в (8) та згрупуємо доданки із α^2

$$-\frac{\omega^2}{|\vec{k}|}B_q + B_q + C_q +$$
$$+\alpha^2\iint\{(\frac{|\overrightarrow{k_1}|^2}{2}+\overrightarrow{k_1}\overrightarrow{k_2})\omega_1 - \frac{\vec{k}(\overrightarrow{k_1}+\overrightarrow{k_2})(|\overrightarrow{k_2}|^2+\overrightarrow{k_1}\overrightarrow{k_2})}{|\overrightarrow{k_2}||\overrightarrow{k_1}+\overrightarrow{k_2}|}\omega_2\}\frac{\omega}{|\vec{k}|}B_{q_1}B_{q_2}B_{q-q_1-q_2}d\overrightarrow{q_1}d\overrightarrow{q_2} =$$
$$-\alpha^2\iint\frac{|\overrightarrow{k_2}|^2+\overrightarrow{k_1}\overrightarrow{k_2}}{|\overrightarrow{k_2}|}(\omega_1+\omega_2)\omega_2 B_{q_1}B_{q_2}B_{q-q_1-q_2}d\overrightarrow{q_1}d\overrightarrow{q_2} +$$
$$+2\alpha^2\iint\frac{[\overrightarrow{k_1}(\vec{k}-\overrightarrow{k_1}) - |\overrightarrow{k_1}||\vec{k}-\overrightarrow{k_1}|][\overrightarrow{k_2}(\vec{k}-\overrightarrow{k_1})]}{|\overrightarrow{k_1}||\overrightarrow{k_2}||\vec{k}-\overrightarrow{k_1}|}\omega_1\omega_2 B_{q_1}B_{q_2}B_{q-q_1-q_2}d\overrightarrow{q_1}d\overrightarrow{q_2} +$$
$$+\alpha^2\frac{1}{2}\iint\{\omega_1^2|\overrightarrow{k_1}| + (\overrightarrow{k_1}\overrightarrow{k_2} - |\overrightarrow{k_1}||\overrightarrow{k_2}|)(|\overrightarrow{k_1}|+|\overrightarrow{k_2}|)\frac{\omega_1\omega_2}{|\overrightarrow{k_1}||\overrightarrow{k_2}|}\}B_{q_1}B_{q_2}B_{q-q_1-q_2}d\overrightarrow{q_1}d\overrightarrow{q_2}$$

Запишемо отриманий результат у формі

$$(1-\frac{\omega^2}{|\vec{k}|})B_q + C_q = \alpha^2\iint f_3(\vec{q},\overrightarrow{q_1},\overrightarrow{q_2})B_{q_1}B_{q_2}B_{q-q_1-q_2}d\overrightarrow{q_1}d\overrightarrow{q_2}$$

Де $f_3(\vec{q},\overrightarrow{q_1},\overrightarrow{q_2})$ дорівнює

$$f_3(\vec{q},\overrightarrow{q_1},\overrightarrow{q_2}) = \{\frac{\vec{k}(\overrightarrow{k_1}+\overrightarrow{k_2})(|\overrightarrow{k_2}|^2+\overrightarrow{k_1}\overrightarrow{k_2})}{|\overrightarrow{k_2}||\overrightarrow{k_1}+\overrightarrow{k_2}|}\omega_2 - (\frac{|\overrightarrow{k_1}|^2}{2}+\overrightarrow{k_1}\overrightarrow{k_2})\omega_1\}\frac{\omega}{|\vec{k}|} - \frac{|\overrightarrow{k_2}|^2+\overrightarrow{k_1}\overrightarrow{k_2}}{|\overrightarrow{k_2}|}(\omega_1+\omega_2)\omega_2 +$$
$$+2\frac{[\overrightarrow{k_1}(\vec{k}-\overrightarrow{k_1}) - |\overrightarrow{k_1}||\vec{k}-\overrightarrow{k_1}|][\overrightarrow{k_2}(\vec{k}-\overrightarrow{k_1})]}{|\overrightarrow{k_1}||\overrightarrow{k_2}||\vec{k}-\overrightarrow{k_1}|}\omega_1\omega_2 + \frac{1}{2}\omega_1^2|\overrightarrow{k_1}| + \frac{1}{2}(\overrightarrow{k_1}\overrightarrow{k_2} - |\overrightarrow{k_1}||\overrightarrow{k_2}|)(|\overrightarrow{k_1}|+|\overrightarrow{k_2}|)\frac{\omega_1\omega_2}{|\overrightarrow{k_1}||\overrightarrow{k_2}|}$$

Спростимо вигляд $f_3(\vec{q},\overrightarrow{q_1},\overrightarrow{q_2})$ застосовуючи процедуру симетризації $\overrightarrow{q_1}$, $\overrightarrow{q_2}$ для несиметричних.

Для першого доданку $f_3(\vec{q},\overrightarrow{q_1},\overrightarrow{q_2})$ розкриємо дужки та для кожного дочірнього доданку маємо

$$\frac{\vec{k}(\overrightarrow{k_1}+\overrightarrow{k_2})(|\overrightarrow{k_2}|^2+\overrightarrow{k_1}\overrightarrow{k_2})}{|\overrightarrow{k_2}||\overrightarrow{k_1}+\overrightarrow{k_2}|}\omega_2\frac{\omega}{|\vec{k}|} = \frac{\vec{k}}{|\vec{k}|}(\overrightarrow{k_1}+\overrightarrow{k_2})\omega < \overrightarrow{k_2},\overrightarrow{k_1}+\overrightarrow{k_2} > \omega_2 =$$
$$= \frac{1}{2}\frac{\vec{k}}{|\vec{k}|}\frac{|\overrightarrow{k_1}+\overrightarrow{k_2}|}{|\overrightarrow{k_1}+\overrightarrow{k_2}|}(\overrightarrow{k_1}+\overrightarrow{k_2})\omega\{< \overrightarrow{k_1},\overrightarrow{k_1}+\overrightarrow{k_2} > \omega_1 + < \overrightarrow{k_2},\overrightarrow{k_1}+\overrightarrow{k_2} > \omega_2\} =$$
$$= \frac{1}{2}|\overrightarrow{k_1}+\overrightarrow{k_2}| < \vec{k},\overrightarrow{k_1}+\overrightarrow{k_2} > \omega\{< \overrightarrow{k_1},\overrightarrow{k_1}+\overrightarrow{k_2} > \omega_1 + < \overrightarrow{k_2},\overrightarrow{k_1}+\overrightarrow{k_2} > \omega_2\}$$

$$(\frac{|\overrightarrow{k_1}|^2}{2}+\overrightarrow{k_1}\overrightarrow{k_2})\omega_1\frac{\omega}{|\vec{k}|}=\frac{1}{2}\frac{\omega}{|\vec{k}|}\{(\frac{|\overrightarrow{k_1}|^2}{2}+\overrightarrow{k_1}\overrightarrow{k_2})\omega_1+(\frac{|\overrightarrow{k_2}|^2}{2}+\overrightarrow{k_1}\overrightarrow{k_2})\omega_2\}=$$

$$=\frac{1}{2}\{\frac{1}{2}\frac{|\overrightarrow{k_1}|^2}{|\vec{k}|}\omega\omega_1+\frac{\overrightarrow{k_1}\overrightarrow{k_2}}{|\vec{k}|}\omega\omega_1+\frac{1}{2}\frac{|\overrightarrow{k_2}|^2}{|\vec{k}|}\omega\omega_2+\frac{\overrightarrow{k_1}\overrightarrow{k_2}}{|\vec{k}|}\omega\omega_2\}=$$

$$=\frac{1}{4}(\frac{|\overrightarrow{k_1}|^2}{|\vec{k}|}\omega\omega_1+\frac{|\overrightarrow{k_2}|^2}{|\vec{k}|}\omega\omega_2)+\frac{1}{2}\omega\frac{\overrightarrow{k_1}\overrightarrow{k_2}}{|\vec{k}|}\frac{|\overrightarrow{k_1}\overrightarrow{k_2}|}{|\overrightarrow{k_1}\overrightarrow{k_2}|}(\omega_1+\omega_2)=$$

$$=\frac{1}{4}(\frac{|\overrightarrow{k_1}|^2}{|\vec{k}|}\omega\omega_1+\frac{|\overrightarrow{k_2}|^2}{|\vec{k}|}\omega\omega_2)+\frac{1}{2}\omega\frac{|\overrightarrow{k_1}\overrightarrow{k_2}|}{|\vec{k}|}<\overrightarrow{k_1}\overrightarrow{k_2}>(\omega_1+\omega_2)$$

Для другого доданку $f_3(\vec{q},\overrightarrow{q_1},\overrightarrow{q_2})$ маємо

$$\frac{|\overrightarrow{k_2}|^2+\overrightarrow{k_1}\overrightarrow{k_2}}{|\overrightarrow{k_2}|}(\omega_1+\omega_2)\omega_2=\frac{1}{2}(\omega_1+\omega_2)\{\frac{|\overrightarrow{k_1}|^2+\overrightarrow{k_1}\overrightarrow{k_2}}{|\overrightarrow{k_1}|}\omega_1+\frac{|\overrightarrow{k_2}|^2+\overrightarrow{k_1}\overrightarrow{k_2}}{|\overrightarrow{k_2}|}\omega_2\}=$$

$$=\frac{1}{2}(\omega_1+\omega_2)\frac{|\overrightarrow{k_1}+\overrightarrow{k_2}|}{|\overrightarrow{k_1}+\overrightarrow{k_2}|}\{\frac{\overrightarrow{k_1}(\overrightarrow{k_1}+\overrightarrow{k_2})}{|\overrightarrow{k_1}|}\omega_1+\frac{\overrightarrow{k_2}(\overrightarrow{k_1}+\overrightarrow{k_2})}{|\overrightarrow{k_2}|}\omega_2\}=$$

$$=\frac{1}{2}(\omega_1+\omega_2)|\overrightarrow{k_1}+\overrightarrow{k_2}|\{<\overrightarrow{k_1},\overrightarrow{k_1}+\overrightarrow{k_2}>\omega_1+<\overrightarrow{k_2},\overrightarrow{k_1}+\overrightarrow{k_2}>\omega_2\}$$

Для третього доданку

$$\omega_1\omega_2\frac{[\overrightarrow{k_1}(\vec{k}-\overrightarrow{k_1})-|\overrightarrow{k_1}||\vec{k}-\overrightarrow{k_1}|][\overrightarrow{k_2}(\vec{k}-\overrightarrow{k_1})]}{|\overrightarrow{k_1}||\overrightarrow{k_2}||\vec{k}-\overrightarrow{k_1}|}=\omega_1\omega_2(\frac{\overrightarrow{k_1}(\vec{k}-\overrightarrow{k_1})}{|\overrightarrow{k_1}||\overrightarrow{k_2}||\vec{k}-\overrightarrow{k_1}|}-\frac{1}{|\overrightarrow{k_2}|})\overrightarrow{k_2}(\vec{k}-\overrightarrow{k_1})=$$

$$=\omega_1\omega_2(\frac{\overrightarrow{k_1}\overrightarrow{k_2}(\vec{k}-\overrightarrow{k_1})^2}{|\overrightarrow{k_1}||\overrightarrow{k_2}||\vec{k}-\overrightarrow{k_1}|}-\frac{\overrightarrow{k_2}(\vec{k}-\overrightarrow{k_1})|\vec{k}-\overrightarrow{k_1}|}{|\overrightarrow{k_2}||\vec{k}-\overrightarrow{k_1}|})=\omega_1\omega_2(<\overrightarrow{k_1},\overrightarrow{k_2}>|\vec{k}-\overrightarrow{k_1}|-<\overrightarrow{k_2},\vec{k}-\overrightarrow{k_1}>|\vec{k}-\overrightarrow{k_1}|)=$$

$$=\frac{1}{2}\omega_1\omega_2\{|\vec{k}-\overrightarrow{k_1}|(<\overrightarrow{k_1},\overrightarrow{k_2}>-<\overrightarrow{k_2},\vec{k}-\overrightarrow{k_1}>)+|\vec{k}-\overrightarrow{k_2}|(<\overrightarrow{k_1},\overrightarrow{k_2}>-<\overrightarrow{k_1},\vec{k}-\overrightarrow{k_2}>)\}$$

Для четвертого і п’ятого відповідно

$$\omega_1^2\overrightarrow{k_1}=\frac{1}{2}(\omega_1^2\overrightarrow{k_1}+\omega_2^2\overrightarrow{k_2})$$

$$(\overrightarrow{k_1}\overrightarrow{k_2}-|\overrightarrow{k_1}||\overrightarrow{k_2}|)(|\overrightarrow{k_1}|+|\overrightarrow{k_2}|)\frac{\omega_1\omega_2}{|\overrightarrow{k_1}||\overrightarrow{k_2}|}=(<\overrightarrow{k_1},\overrightarrow{k_2}>-1)\omega_1\omega_2(|\overrightarrow{k_1}|+|\overrightarrow{k_2}|).$$

Остаточно $f_3(\vec{q},\overrightarrow{q_1},\overrightarrow{q_2})$ матиме вигляд

$$\mathrm{f}_3(\vec{q},\overrightarrow{q_1},\overrightarrow{q_2})=\frac{1}{4}(\omega_1^2\overrightarrow{k_1}+\omega_2^2\overrightarrow{k_2})-\frac{1}{4}(\frac{|\overrightarrow{k_1}|^2}{|\vec{k}|}\omega\omega_1+\frac{|\overrightarrow{k_2}|^2}{|\vec{k}|}\omega\omega_2)-$$

$$-\frac{1}{2}(\omega_1+\omega_2)|\overrightarrow{k_1}+\overrightarrow{k_2}|\{<\overrightarrow{k_1},\overrightarrow{k_1}+\overrightarrow{k_2}>\omega_1+<\overrightarrow{k_2},\overrightarrow{k_1}+\overrightarrow{k_2}>\omega_2\}-$$

$$-\frac{1}{2}\omega\frac{|\overrightarrow{k_1}\overrightarrow{k_2}|}{|\vec{k}|}<\overrightarrow{k_1}\overrightarrow{k_2}>(\omega_1+\omega_2)+$$

$$+\frac{1}{2}|\overrightarrow{k_1}+\overrightarrow{k_2}|<\vec{k},\overrightarrow{k_1}+\overrightarrow{k_2}>\omega\{<\overrightarrow{k_1},\overrightarrow{k_1}+\overrightarrow{k_2}>\omega_1+<\overrightarrow{k_2},\overrightarrow{k_1}+\overrightarrow{k_2}>\omega_2\}-$$

$$-\frac{1}{2}(<\overrightarrow{k_1},\overrightarrow{k_2}>-1)\omega_1\omega_2(|\overrightarrow{k_1}|+|\overrightarrow{k_2}|)+$$

$$+\omega_1\omega_2\{|\vec{k}-\overrightarrow{k_1}|(<\overrightarrow{k_1},\overrightarrow{k_2}>-<\overrightarrow{k_2},\vec{k}-\overrightarrow{k_1}>)+|\vec{k}-\overrightarrow{k_2}|(<\overrightarrow{k_1},\overrightarrow{k_2}>-<\overrightarrow{k_1},\vec{k}-\overrightarrow{k_2}>)\}.$$

Після всіх підстановок отримуємо наступне динамічне рівняння для подальшого аналізу [3]

$$(1-\frac{\omega^2}{|\vec{k}|})B_q + C_q = \alpha\int \mathrm{f}_2(\vec{q},\overrightarrow{q_1})B_q B_{q-q_1}\mathrm{d}\overrightarrow{q_1} + \alpha^2\iint \mathrm{f}_3(\vec{q},\overrightarrow{q_1},\overrightarrow{q_2})B_{q_1}B_{q_2}B_{q-q_1-q_2}\mathrm{d}\overrightarrow{q_1}\mathrm{d}\overrightarrow{q_2}$$

Проведено дослідження поширення випадкових поверхневих гравітаційних хвиль ідеальної нестисної рідини у тривимірному півпросторі.

Висновки

Представлено поле відхилень та потенціали швидкостей у вигляді інтегралів Фур'є-Стілтьєса. Отримано динамічне рівняння в інтегральній формі для стохастичної амплітуди поля відхилень через розвинення у ряд за малим параметром. Для підінтегральних функцій трихвильової взаємодії проведемо процедуру симетризації та описано алгоритм для її покрокового виконання.

Список літератури

1. Полников В. Г. Нелинейная теория случайного поля волн на воде / В. Г. Полников., 2007.
2. Brown M. G. Green's function retrieval in a field of random water waves / M. G. Brown, C. Lu. // Wave Motion. – 2016. – №60. – С. 8–19.
3. Masuda A. On the dispersion relation of random gravity waves / A. Masuda, Y. Kuo, H. Mitsuyasu. // Fluid Mech. – 1979. – №92. – С. 717–730.