УДК 519.21

АНАЛІЗ АСИМПТОТИКИ ЗБІЖНОСТІ ДО ГРАНИЧНОЇ МАТРИЦІ ПЕРЕХОДУ В ОДНОРІДНОМУ ДИСКРЕТНОМУ ЛАНЦЮЗІ МАРКОВА

Макарчук Олег, Токарь Володимир

Науковий керівник: канд.-ф.-м. наук, доцент Макарчук О.П.

Центральноукраїнський державний педагогічний університет імені Володимира Винниченка, м. Кропивницький, Україна

Анотація. *В статті представлено оцінки асимптотики збіжності до граничної матриці переходу на нескінченності для однорідного ланцюга Маркова з дискретним часом. Акцент здійснюється на випадок, коли всі ймовірності переходу, тобто елементи відповідної матриці переходу є строго додатними числами. Аналіз асимптотики збіжності здійснюється на основі використання методів лінійної алгебри, а саме представлені матриці в діагональному вигляді.*

Ключові слова*: ланцюг Маркова, ергодичність, випадковий процес, дискретний час, матричний аналіз, стаціонарність, послідовність.*

Analysis of the asymptotics of convergence to the boundary matrix of transition in s homogeneous discrete Markov chain

O Makarchuk, V Tokar

Scientific supervisor: Candidate of Physics and Mathematics Science Makarchuk O.P.

Volodymyr Vynnychenko Ukrainian State Pedagogical University, Kropyvnystky, Ukraine

Annotation. *The paper presents estimates of the asymptotics of convergence to the boundary matrix of the infinity transition for a homogeneous Markov chain with discrete time. The emphasis is on the case when all the probabilities of the transition, ie the elements of the corresponding transition matrix are strictly positive numbers. The analysis of the asymptotics of* *convergence is carried out on the basis of the use of methods of linear algebra, namely, the matrices are presented in diagonal form.*

Key words*: Markov chain, ergodicity, random process, discrete time, matrix analysis, stationarity, sequence.*

1. Постановка проблеми.

Класичним об'єктом теорії випадкових процесів є ланцюги Маркова. Серед ланцюгів Маркова розглядають два типи, а саме ланцюги Маркова з дискретним часом та відповідно ланцюги Маркова з неперервним часом. Ланцюги Маркова з дискретним часом складаються з дискретної тобто не більш ніж зчисленної множини станів, які можуть бути пунктами переходу фізичної системи. Ланцюги Маркова з дискретним часом характеризуються стохастичним вектором початкового стану та матрицею переходу між станами. У випадку коли всі елементи стохастичної матриці переходу є строго додатними, то за ергодичною теоремою Маркова існує гранична матриця перехідних ймовірностей або матриця переходу на нескінченності.

Цілком природним питанням залишається наступне: яка асимптотика збіжності в ланцюзі Маркова з дискретним часом до відповідної матриці переходу. Відповідне питання є актуальним як з чисто теоретичних міркувань так і з практичних. При наявності відповідних оцінок для асимптотики можливо вказати крок, який є достатнім для знаходження відповідних елементів стохастичної матриці переходу на нескінченності з наперед заданою точністю.

Робота присвячена проблемі дослідження асимптотики збіжності до граничної матриці переходу для однорідних ланцюгів Маркова з дискретним часом.

Об'єкт дослідження: ланцюг Маркова з дискретним часом.

Предмет дослідження: гранична матриця переходу для ланцюгів Маркова з дискретним часом.

Мета дослідження: ідентифікувати асимптотику збіжності до граничної матриці переходу для ланцюгів Маркова з дискретним часом.

Результати дослідження є актуальними та можуть бути використані при викладанні спец курсу з теорії ймовірностей та теорії випадкових процесів.

2. Оцінка асимптотики збіжності до граничної матриці переходу.

Отже, нехай для однорідного ланцюга Маркова з дискретним часом маємо наступну матрицю перехідних ймовірностей:

$$P = \begin{pmatrix} 0.1 & 0.2 & 0.7 \\ 0.2 & 0.3 & 0.5 \\ 0.3 & 0.4 & 0.3 \end{pmatrix}$$

У цьому випадку граф Ланцюга Маркова має наступний вигляд:

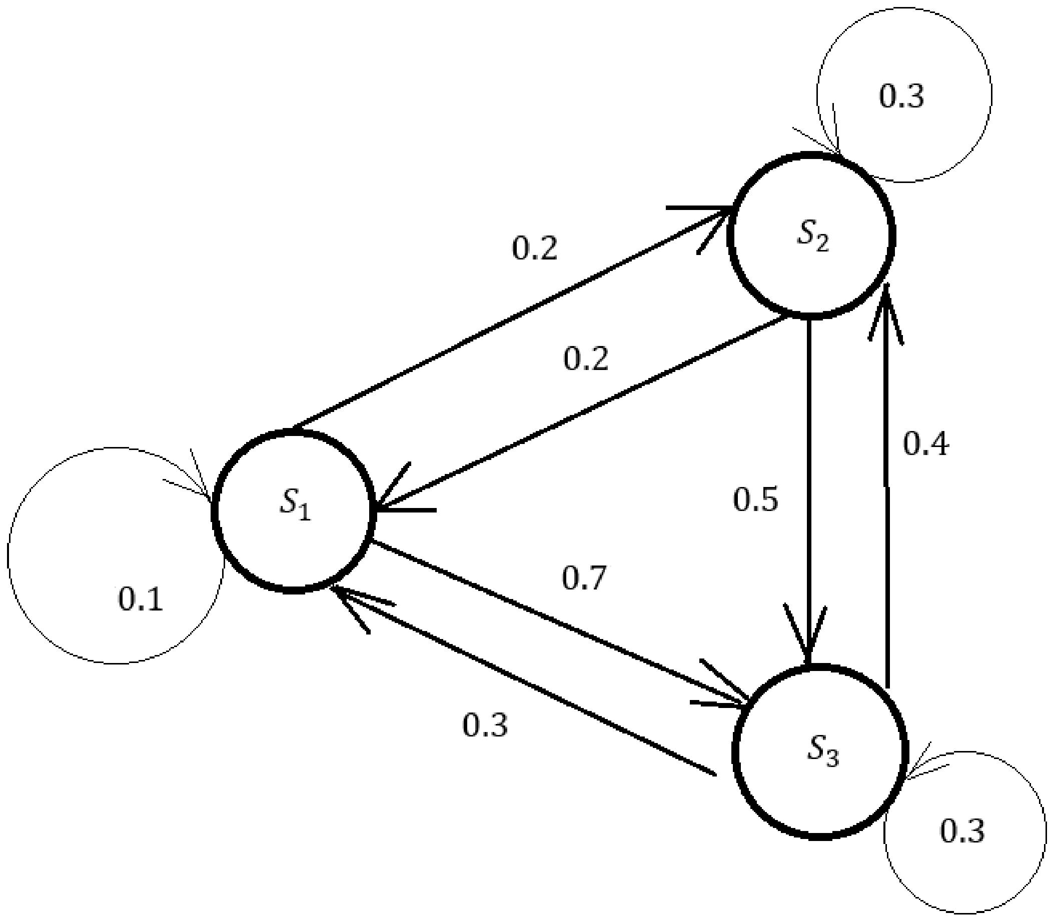

Рис 1.Граф однорідного ланцюга Маркова з трьома станами переходу, апробація теоретичних викладок.

Знайдемо характеристичне рівняння і відповідний характеристичний многочлен.

$$\det(P-\lambda E)=det\begin{pmatrix}0.1-\lambda & 0.2 & 0.7\\ 0.2 & 0.3-\lambda & 0.5\\ 0.3 & 0.4 & 0.3-\lambda\end{pmatrix}$$

Здійснює розклад по першому рядку, відповідно маємо:

$$(0.1-\lambda)\det\begin{pmatrix}0.3-\lambda & 0.5\\ 0.4 & 0.3-\lambda\end{pmatrix}-0.2\det\begin{pmatrix}0.2 & 0.5\\ 0.3 & 0.3-\lambda\end{pmatrix}$$
$$+0.7\det\begin{pmatrix}0.2 & 0.3-\lambda\\ 0.3 & 0.4\end{pmatrix}=0$$

Характеристичне рівняння має вигляд:

$$-\lambda^3+0.7\lambda^2+0.3\lambda+0=0$$

Легко знайти відповідні нулі: $1;\ 0;\ -0{,}3$.

Перейдемо до знаходження власних векторів, які відповідають власним значенням матриці.

Розглядаємо випадок $\lambda=-0.3$

Система однорідних рівнянь має вигляд:

$$\begin{cases}0.4x_1+0.2x_2+0.7x_3=0;\\ 0.2x_1+0.6x_2+0.5x_3=0;\\ 0.3x_1+0.4x_2+0.6x_3=0;\end{cases}$$

Зрозуміло, що одне з рівнянь є надлишковим, наприклад третє тому можливо розглянути лише систему з двох рівнянь.

$$\begin{cases}0.4x_1+0.2x_2+0.7x_3=0\\ 0.2x_1+0.6x_2+0.5x_3=0;\end{cases}$$

Можливо друге рівняння помножити на -2 і додати до першого отримаємо:

$$-x_2-0.3x_3=0$$

Звідки отримаємо, що

$$x_2=-0.3x_3$$

Тобто маємо:

$$x_1=-3x_2-2.5x_3=-1.6x_3$$

Взявши $x_3=1$ наприклад отримаємо власний вектор:

$$\bar{a}=(-1.6;-0.3;1)$$

Розглядаємо випадок $\lambda=1$

Система однорідних рівнянь має вигляд:

$$\begin{cases} -0.9x_1 + 0.2x_2 + 0.7x_3 = 0; \\ 0.2x_1 - 0.7x_2 + 0.5x_3 = 0; \\ 0.3x_1 + 0.4x_2 - 0.7x_3 = 0; \end{cases}$$

В результаті можливо отримати, що виконується умова:

$$\begin{cases} x_1 = x_2 \\ x_2 = x_3; \end{cases}$$

Візьмемо наприклад $x_3 = 1$ отримаємо власний вектор:

$$\bar{b} = (1; 1; 1)$$

І нарешті розглянемо власне значення $\lambda = 0$. У цьому випадку отримаємо систему наступних лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} 0.1x_1 + 0.2x_2 + 0.7x_3 = 0; \\ 0.2x_1 + 0.3x_2 + 0.5x_3 = 0; \\ 0.3x_1 + 0.4x_2 + 0.3x_3 = 0; \end{cases}$$

В результаті можливо отримати, що виконується умова:

$$\begin{cases} x_2 = -9x_3 \\ x_1 = 11x_3; \end{cases}$$

Візьмемо наприклад $x_3 = 1$ отримаємо власний вектор:

$$\bar{c} = (11; -9; 1)$$

Ортогоналізуємо та нормуємо відповідні вектори маємо:

$$\overline{h_1} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

$$\overline{h_2} = \left(-\frac{9}{\sqrt{122}}; \frac{5}{\sqrt{122}}; \frac{4}{\sqrt{122}}\right)$$

$$\overline{h_3} = \left(\frac{12}{\sqrt{6089}}; \frac{-43}{\sqrt{6089}}; \frac{64}{\sqrt{6089}}\right)$$

Зрозуміло, що

$$Q^{-1} = Q^T$$

Таким чином,

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{9}{\sqrt{122}} & \frac{12}{\sqrt{6089}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{5}{\sqrt{122}} & \frac{-43}{\sqrt{6089}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{4}{\sqrt{122}} & \frac{64}{\sqrt{6089}} \end{pmatrix}$$

$$Q^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{9}{\sqrt{122}} & \frac{5}{\sqrt{122}} & \frac{4}{\sqrt{122}} \\ \frac{12}{\sqrt{6089}} & \frac{-43}{\sqrt{6089}} & \frac{64}{\sqrt{6089}} \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -0.3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Звідки можливо отримати, що

$$P^n = QA^nQ^{-1} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0.12 + 0.33(-0.3)^n & 0.23 + 0.56(-0.3)^n & 0.65 - 0.89(-0.3)^n \\ 0.24 - 0.23(-0.3)^n & 0.37 + 0.17(-0.3)^n & 0.39 + 0.06(-0.3)^n \\ 0.24 + 0.08(-0.3)^n & 0.35 - 0.24(-0.3)^n & 0.41 + 0.16(-0.3)^n \end{pmatrix}$$

Звідки можливо знайти граничну матрицю переходу на нескінченності:

$$P^\infty = \begin{pmatrix} 0.12 & 0.23 & 0.65 \\ 0.24 & 0.37 & 0.39 \\ 0.24 & 0.35 & 0.41 \end{pmatrix}$$

Як видно порядок асимптотики збіжності має вид:

$$O((-0.3)^n).$$

Висновки: Порядок збіжності до граничної матриці переходу має вид: $O(\lambda_2^n)$, при умові що нулі відповідного характеристичного рівняння задовольняють умову:

$$1 = |\lambda_1| < |\lambda_2| \le |\lambda_3| \le \cdots \le |\lambda_n|.$$

Список літератури

1. Аверина Т.А. Верификация численных методов решения систем со случайной структурой. − Новосибирск: Новосибирский гос. ун-т (НГУ), 2018. − 178 с.
2. Аверина Т.А. Статистическое моделирование решений стохастических дифференциальных уравнений и систем со случайной структурой – Новосибирск: СО РАН, 2019. − 350 с.
3. Гасников А.В., Горбунов Э.А., Гуз С.А. Случайные процессы. – М.: МФТИ, 2019. − 285 с.
4. Гельгор А.Л., Горлов А.И., Попов Е.А. Методы моделирования случайных величин и случайных процессов. − СПб.: Изд-во Политехнического университета, 2017. −217 с.

5. Зорин А.В., Зорин В.А., Пройдакова Е.В., Федоткин М.А. Введение в общие цепи Маркова. – Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2018. – 51 с.