УДК 519.21

ВИКОРИСТАННЯ РОЗКЛАДУ ТЕЙЛОРА ДЛЯ НАБЛИЖЕНОГО РОЗВ'ЯЗАННЯ ПРЯМОЇ СИСТЕМИ КОЛМОГОРОВА

Макарчук Олег, Резінов Артем

Науковий керівник: канд.-ф.-м. наук, доцент Макарчук О.П.

Центральноукраїнський державний педагогічний університет імені Володимира Винниченка, м. Кропивницький, Україна

Анотація. *В статті представлено оцінки асимптотики збіжності поліномів Тейлора, породжених розв'язками прямої системи Колмогорова для ланцюга Маркова з неперервним часом. Акцент здійснюється на випадок, коли система складається з трьох станів з різними інтесивностями переходів. Аналіз асимптотики збіжності здійснюється на основі використання рекурентних співвідношень, виведених з відповідної прямої системи Колмогорова. Оцінка відхилень будується з використанням метрики Чебишева в просторі неперевних функцій, визначених на відрізку* $[0;1]$.

Ключові слова*: ланцюг Маркова, інтенсивність, випадковий процес, неперервний час, матричний аналіз, система Колмогорова, поліноми.*

Use of the Taylor development for the approximate solution of the Kolmogorov direct system

O Makarchuk, A Rezinov

Scientific supervisor: Candidate of Physics and Mathematics Science Makarchuk O.P.

Volodymyr Vynnychenko Ukrainian State Pedagogical University, Kropyvnystky, Ukraine

Annotation. *The paper presents estimates of the asymptotics of convergence of Taylor polynomials generated by solutions of the Kolmogorov direct system for a continuous-time Markov chain. The emphasis is on the case when the system consists of three states with different intensities of transitions. The analysis of the asymptotics of convergence is carried out on the basis of the use of recurrent relations derived from the corresponding direct Kolmogorov system.*

The estimation of deviations is based on the use of Chebyshev metrics in the space of continuous functions defined on the interval [0; 1].

***Keywords**: Markov chain, intensity, random process, continuous time, matrix analysis, Kolmogorov system, polynomials.*

1. Постановка проблеми.

В теорії випадкових процесів та теорії ймовірностей під ланцюгом Маркова з неперервним часом розуміють випадковий процес наступного виду: $\{X(t) : t \geq 0\}$, який відповідно визначений у неперервному часовому діапазоні (проміжку або часі), який приймає значення у деякій не більш ніж зчисленній множині і задовольняє відповідну властивість Маркова. Відмінність цього виду ланцюгів Маркова від дискретних ланцюгів Маркова полягає в тому, що переходи між станами можуть відбуватися в будь-які моменти часу і час наступного переходу теж є випадковою величиною.

Ланцюг Маркова з неперервним часом є класичним об'єктом теорії стохастичних процесів і має численне прикладне застосування в різних областях людської діяльності. Вичерпно характеризує ланцюг Маркова пряма система диференціальних рівнянь Колмогорова, яка в загальній постановці не може бути розв'язана точно, що в свою чергу викликає інтерес до наближених методів, зокрема на основі розкладу Тейлора.

Робота присвячена проблемі наближеного розв'язання прямої системи рівнянь Колмогорова, на основі розкладу Тейлора.

Об'єкт дослідження: однорідний ланцюг Маркова з неперервним часом.

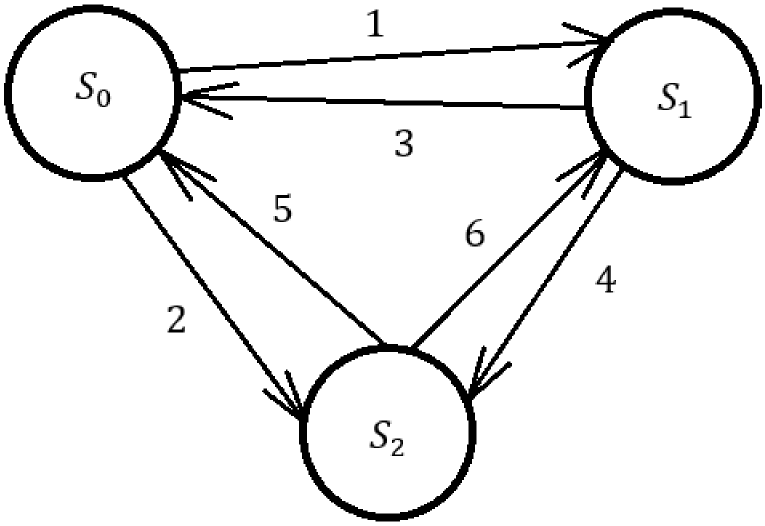
Предмет дослідження: система рівнянь Колмогорова, що відповідає однорідним ланцюгам Маркова з неперервним часом.

Мета дослідження: дослідити апроксимаційні характеристики поліномів Тейлора по відношенню до розв'язків системи рівнянь Колмогорова.

Результати дослідження є актуальними та можуть бути використані при викладанні спец курсу з теорії ймовірностей та теорії випадкових процесів.

2. Оцінка асимптотики збіжності поліномів Тейлора до розв'язків прямої системи Колмогорова.

Граф однорідного марківського ланцюга з неперервним часом з інтенсивностями має вигляд:



а) скласти та розв'язати відповідну систему рівнянь Колмогорова (в нульовий момент часу система була в стані S_0);

б) знайти фінальні ймовірності для ланцюга Маркова.

Пряма система рівнянь Колмогорова має вигляд:

$$\begin{cases} p_0'(t) = -3p_0\,(t) + 3p_1\,(t) + 5p_2\,(t); \\ p_1'(t) = -7p_1\,(t) + p_0\,(t) + 6p_2\,(t); \\ p_2'(t) = -11p_2\,(t) + 2p_0\,(t) + 4p_1\,(t); \end{cases}$$

Розв'яжемо відповідну систему рівнянь Колмогорова класичним методом підстановки. Виразимо з першого рівняння $p_2\,(t)$ та підставимо в друге та третє рівняння:

$$p_2 = 0{,}2p_0' + 0{,}6p_0 - 0{,}6p_1$$

Маємо:

$$p_1' = -7p_1 + p_0 + 1{,}2p_0' + 3{,}6p_0 - 3{,}6p_1$$

$$p_1' = -10{,}6p_1 + 4{,}6p_0 + 1{,}2p_0'$$

При підстановці в третє рівняння маємо:

$$0{,}2p_0'' - 0{,}6p_1' = -2{,}8p_0' - 4{,}6p_0 + 8{,}6p_1$$

При подальшій підстановці маємо:

$$0{,}2p_0'' + 6{,}26p_1 - 2{,}76p_0 - 0{,}72p_0' = -2{,}8p_0' - 4{,}6p_0 + 8{,}6p_1$$

Отже,

$$0{,}2p_0'' + 1{,}84p_0 + 2{,}08p_0' = 2{,}34p_1$$

Здійснюємо підстановку відповідного значення p_1:

$$0{,}09p_0''' + 0{,}89p_0'' + 0{,}79p_0' =$$

$$= -10{,}6(0{,}09p_0'' + 0{,}79p_0 + 0{,}89p_0') + 4{,}6p_0 + 1{,}2p_0'$$

Здійснюємо спрощення:

$$0{,}09p_0''' + 1{,}844p_0'' + 9{,}024p_0' = 0.$$

Характеристичне рівняння має вигляд:

$$0.09x^3 + 1.844x^2 + 9.024x = 0.$$

Отже, маємо наступний загальний розв'язок диференціального рівняння:

$$p_0(t) = Ae^{-12{,}41t} + Be^{-8{,}08t} + Ce^{0t}$$

Знайдемо, $p_1(t)$:

$$p_1 = 0{,}09p_0'' + 0{,}79p_0 + 0{,}89p_0' =$$

$$= 4{,}5Ae^{-12{,}41t} - 1{,}04Be^{-8{,}08t} + 0{,}79Ce^{0t}$$

Знайдемо, $p_2(t)$:

$$p_2(t) = 0{,}2p_0' + 0{,}6p_0 - 0{,}6p_1 = 6{,}2Ae^{-12{,}41t} + 2{,}07Be^{-8{,}08t} + 0{,}126Ce^{0t}$$

В подальшому будемо використовувати умови:

$$\begin{cases} p_0\,(0) = 1; \\ p_1\,(0) = 0; \\ p_2\,(0) = 0; \end{cases}$$

Отримаємо наступну систему лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} A + B + C = 1; \\ 4{,}5A - 1{,}04B + 0{,}79C = 0; \\ 6{,}2A + 2{,}07B + 0{,}126C = 0; \end{cases}$$

Розв’язуючи яку отримаємо наступні розв’язки:

$$\begin{cases} A = 0.04; \\ B = 0.335; \\ C = 0.625; \end{cases}$$

Таким чином маємо явні співвідношення для ймовірностей переходу між станами:

$$p_0(t) = 0.04e^{-12{,}41t} + 0.335e^{-8{,}08t} + 0.625$$

$$p_1(t) = 0.023e^{-12{,}41t} - 0.244e^{-8{,}08t} + 0.221$$

$$p_2(t) = -0.063e^{-12{,}41t} - 0.091e^{-8{,}08t} + 0.154$$

Це дає змогу знайти фінальні ймовірності:

$$b_0 = \lim_{t\to\infty}(\,0.04e^{-12{,}41t} + 0.335e^{-8{,}08t} + 0.625) = 0.625$$

$$b_1 = \lim_{t\to\infty}(\,0.023e^{-12{,}41t} - 0.244e^{-8{,}08t} + 0.221) = 0.221$$

$$b_2 = \lim_{t\to\infty}(\,-0.063e^{-12{,}41t} - 0.091e^{-8{,}08t} + 0.154) = 0.154$$

Таким чином, можливо вважати, що функції ймовірностей переходу є аналітичними функціями, тобто їх можливо розвинути в ряди Тейлора:

$$p_0\,(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k,$$

$$p_1\,(t) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k t^k,$$

$$p_2\,(t) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k t^k,$$

Отримаємо наступну систему рекурентних співвідношень:

$$\begin{cases} a_{k+1}(k+1) = -3a_k + 3b_k + 5c_k; \\ b_{k+1}(k+1) = a_k - 7b_k + 6c_k; \\ c_{k+1}(k+1) = 2a_k + 4b_k - 11c_k; \end{cases}$$

Для прикладу розглянемо випадок $n = 2$:

$$\varphi_{02}(t) = |f_2\,(t) - p_0(t)| = |0.04e^{-12,41t} + 0.335e^{-8,08t} - 0.339 + 3t - 11t^2|$$

$$\varphi_{12}(t) = |g_n\,(t) - p_1(t)| = |0.023e^{-12,41t} - 0.244e^{-8,08t} + 0.221 - t - 11t^2|$$

$$\varphi_{22}(t) = |h_n\,(t) - p_2(t)| =$$

$$= |-0.063e^{-12,41t} - 0.091e^{-8,08t} + 0.154 - 2t + 12t^2|$$

Нехай

$$\Delta_0(n) = \max_{[0;1]} |f_n\,(t) - p_0(t)|$$

$$\Delta_1(n) = \max_{[0;1]} |g_n\,(t) - p_1(t)|$$

$$\Delta_2(n) = \max_{[0;1]} |h_n\,(t) - p_2(t)|$$

Враховуючи, сервіс wolframalpha можливо обрахувати значення $\Delta_j(n)$. Для цього можливо використати команду:

maximize |-0.063e^(-12.41t)-0.091e^(-8.08t)+0.154-2t+12t^2| t from 0 to 1

Таблиця 1. Величини відхилень $\Delta_j(n), (j \in \{0; 1; 2\})$.

$\boldsymbol{n}$	$\Delta_{\mathbf{0}}(\boldsymbol{n})$	$\Delta_{\mathbf{1}}(\boldsymbol{n})$	$\Delta_{\mathbf{2}}(\boldsymbol{n})$
2	10,154	11,779	8,339
3	8,254	9,334	6,903
4	6,309	7,045	4,112
5	2,065	4,172	1,008
6	0,945	1,309	0,25

Висновки. Аналізуючи відповідні результати обрахунків можливо зробити висновок: прослідковуються збіжність поліномів Тейлора до відповідних функцій ймовірностей перебування по кожному стану. Асимптотика збіжності є доволі повільною, що передбачає в практичному розумінні розгляду поліномів Тейлора достатньо високого порядку. Таким чином, lля наближеного розв'язання системи рівнянь Колмогорова можливо також розглянути і інші методи наближеного розв'язання систем диференціальних рівнянь, зокрема наприклад: метод Ейлера, Рунге-Кутта, Мілна-Адамса, Хемінга тощо.

Список літератури

1. *Аверина Т.А. Верификация численных методов решения систем со случайной структурой. − Новосибирск: Новосибирский гос. ун-т (НГУ), 2018. − 178 с.*
2. *Аверина Т.А. Статистическое моделирование решений стохастических дифференциальных уравнений и систем со случайной структурой – Новосибирск: СО РАН, 2019. − 350 с.*
3. *Гасников А.В., Горбунов Э.А., Гуз С.А. Случайные процессы. – М.: МФТИ, 2019. − 285 с.*
4. *Гельгор А.Л., Горлов А.И., Попов Е.А. Методы моделирования случайных величин и случайных процессов. − СПб.: Изд-во Политехнического университета, 2017. −217 с.*
5. *Зорин А.В., Зорин В.А., Пройдакова Е.В., Федоткин М.А. Введение в общие цепи Маркова. – Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2018. – 51 с.*