УДК 004.03

КОМПЛЕКСНІ ЧИСЛА, ПІФАГОРІЙСЬКІ ТРІЙКИ ТА СТІЙКІСТЬ

Філер Залмен Юхимович
Центральноукраїнський державний педагогічний університет імені Володимира Винниченка, м. Кропивницький, Україна

В роботі розглянуто комплексні числа та піфагорійські трійки. Введено поняття фінітної площини. Показано, як з використанням такого підходу можна наочно зображати нескінченності.
Ключові слова: комплексні числа, піфагорові трійки, годограф.

CREATION OF A GRAPHIC APPLICATION WITH MAPLE TOOLS FOR COMPUTER SIMULATION OF STOCHASTIC WAVES

Filer Zalmen Yuhymovych
Volodymyr Vynnychenko Central Ukrainian State Pedagogical University, Kropyvnytskyi, Ukraine

The complex numbers and Pythagorean triples are considered in the work. The concept of the finite plane is introduced. It is shown how to use this approach to visualize infinities.
Keywords: complex numbers, Pythagorean triples, hodograph.

Вступ. Розглянемо *цілі гаусові* числа $m+in$ (m і n – цілі числа). Для них маємо тотожність $(|m+in|^2)^2 = \left|(m+in)^2\right|^2 \Leftrightarrow (m^2+n^2)^2 \equiv (m^2-n^2)^2+(2mn)^2$.

Вона стверджує, що числа m^2-n^2 ($m>n$), $2mn$ та m^2+n^2 створюють *піфагорійську трійку* (ПТ), тобто дорівнюють відповідно катетам та гіпотенузі трикутника. При $m=2, n=1$ будемо мати єгипетську трійку 3, 4, 5; при $m=3,\ n=1$ маємо 8, 6, 10. Взяв $m=5, n=3$ отримаємо трійку 16, 30, 34; скоротивши, матимемо подібний трикутник зі сторонами 8, 15, 17. Легко перевірити, що він прямокутний: $8^2+15^2=17^2$ ($64+225=289$).

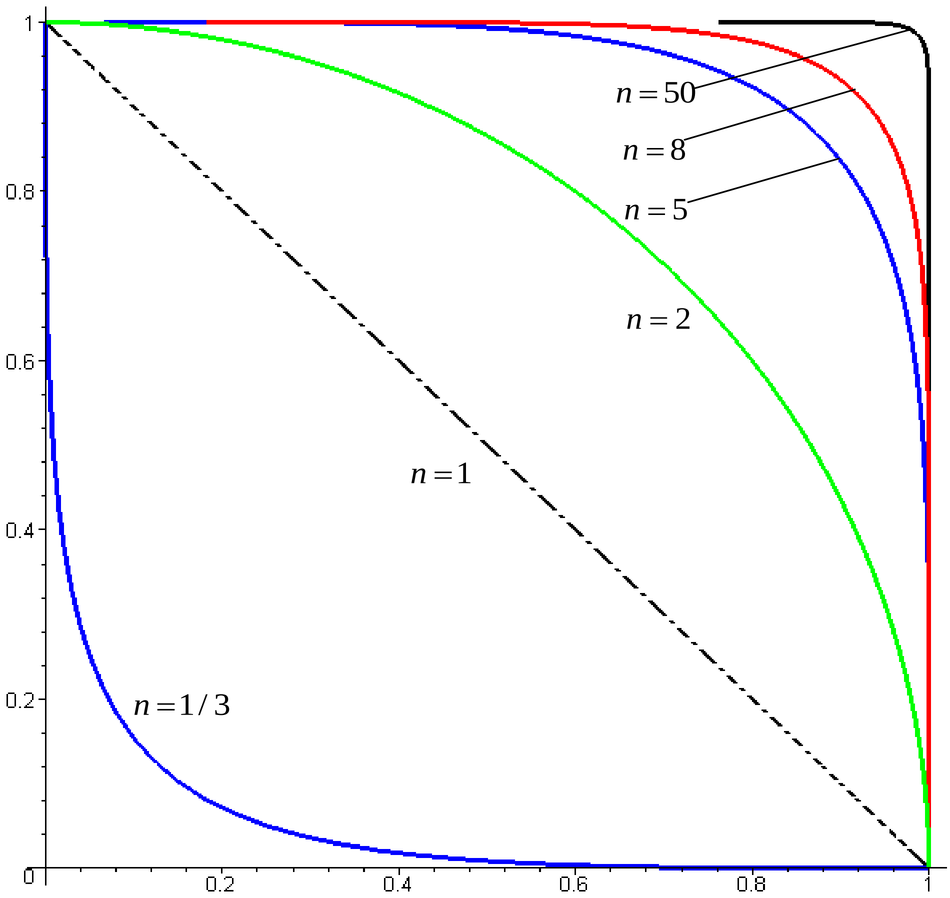

Рис. 1. **На кривій $x=\cos t$, $y=\sin t$ є раціональні точки; на кривих $x=\cos^{2/n} t$, $y=\sin^{2/n} t$ при $n\geq 3$ таких точок немає**

Як стверджується в [1, с.457] «Усі трійки взаємно простих ПТ можна отримати за формулами $x=m^2-n^2$, $y=2mn, z=m^2+n^2$, де m і n - цілі числа». Навпаки, маючи піфагорійську трійку $x, y, z=\sqrt{x^2+y^2}\in N$, можна знайти відповідні m, n. Для цього треба розв'язати рівняння відносно m і n. З них маємо $m^2=(z+x)/2, n^2=(z-x)/2$. Так, для трійки 7, 24, 2 $m^2=(25-7)/2=9, n^2=(25+7)/2=16 \Rightarrow m=3, n=4.$ Очевидно, $2mn=2\cdot 3\cdot 4=24=y.$

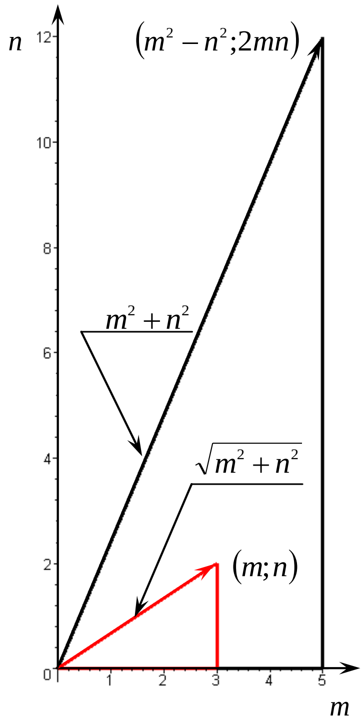

Рис. 2. Квадрат (m+in)^2

«Натуральне гаусове число» $m+in$ не завжди має цілий модуль, але його *квадрат* завжди породжує ПТ. Це пояснює рис. 9. Число $3+4i$ має модуль 5, але число $3+i$ має модуль $\sqrt{10}$. Його квадрат 8 + 6i має модуль 10; воно дає піфагорійську трійку 6, 8, 10.

1. Інші діофантові рівняння. Використовуючи тотожність $(|m+in|^2)^3 = \left|(m+in)^3\right|^2$, отримаємо $(m^3-3mn^2)^2+(3m^2n-n^3)^2=(m^2+n^2)^3$, що дає при цілих m і n *цілі* розв'язки рівняння $x^2+y^2=z^3$. При $m=2, n=1$ маємо рівність $2^2+11^2 = 5^3$.

Рівняння $(|m+in|^4)^2 = \left|(m+in)^4\right|^2$ дає ще формули для отримання піфагорійських трійок: $m^4-6m^2n^2+n^4$, $4mn(m^2-n^2)$ і $(m^2+n^2)^2$. При $m=3, n=1$ будемо мати трійку 28, 96, 100, скорочуючи яку, отримаємо 7, 24, 25. Останню можно отримати за класичними формулами при $m=4, n=3$.

Комплексні числа стали відомі в Середньовіччя, а піфагорійські числа знали ще в давній Греції. Як вони знайшли ці формули?

2. Рівняння у Великій теоремі Ферма $x^n+y^n=z^n$ не має *натуральних* розв'язків. Поділивши на z^n, отримаємо рівняння $x^n+y^n=1$, де x та y обидва не можуть бути *раціональними* при $n\geq 3$. Раціональні точки мають *обидві* координати раціональними. Для $n=2$ такі точки є (3/5 і 4/5, наприклад). При $n=1$ отримується пряма, на якій стільки ж *раціональних* точок, скільки їх на відрізку $[0;1]$. При $n=\frac{2}{3}$ отримаємо рівняння $\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{y^2}=1,$ яке *має* раціональні розв'язки (наприклад, $x=0.6^3, y=0,8^3$).

З рівняння (1) випливає $y=\sqrt[n]{1-x^n}$. Розкладаючи в ряд, отримаємо $y=1-\frac{1}{n}x^n-\frac{n-1}{2n^2}x^{2n}-...$ При $0\le x<1$ ряд збіжний при натуральних n. При раціональних x всі члени цього ряду є *раціональними,* але його сума за теоремою Ферма при $n>2$ завжди ірраціональна. Поблизу точки 0 й великому n з високою точністю $y\approx 1.$ У зв'язку із симетрією рівняння (1) відносно x і y, теж буде при $x\approx 1$. Крива близька до контуру квадрата (Рис. 1 при $n=50$).

3. **Зображення нескінчених множин.** У 80-х роках автор здогадався зображати трансфінітні числа Кантора на кінцевих відрізках числової прямої. У 1987 р. їм була зроблена на цю тему доповідь на Міжнародному конгресі з логіки, методології і філософії науки. У [1] ця ідея була повторена. При цьому таке число ω було межею геометричної прогресії, наприклад, із знаменником $q=1/2$. Послідовність 1. 2, 3., … до ω, укладається на відрізку $[1, L)$, $L=1/(1-q)$. Ця ідея реалізується і числову вісь, площину і простір за формулою $x'=x/|x|(1-q^{|x|})/(1-q)$. Зокрема, площина відобразиться в круг радіуса $R=1/(1-q)$. При цьому нескінчені лінії будуть зображені в цьому крузі; їх точки будуть мати ті самі аргументи. Нескінченно віддалені точки перейдуть в точки граничного кола.

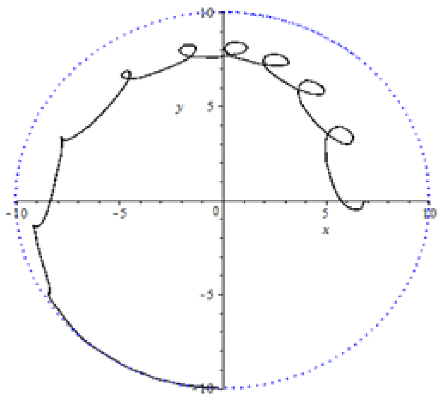

Рис. 3. Годограф рівняння із запізненням на 19

Цей підхід може бути використаний для встановлення стійкості лінійних диференціальних рівнянь. Рівняння n-го порядку має характеристичний поліном $f(\lambda)=a_0+a_1\lambda+a_2\lambda^2+\ldots+a_{n-1}\lambda^{n-1}+a_n\lambda^n$. Асимптотична стійкість буде, якщо годограф функції $f(i\omega)=a_0-a_2\omega^2+\ldots+i(a_1\lambda-a_3\lambda^3+\ldots)$ буде робити поворот навколо точки O проти годинникової стрілки на кут $n\pi/2$. Цей алгоритм легко реалізувати з допомогою пакета Maple, в якому є програма для побудови комплексних функцій. В ньому будується лінія за формулою $W=f(it)/|f(it)|(1-q|f(it)|)/(1-q), 0<q<1, 0\le t<\omega.$ Цей метод можна застосовувати і для диференціальних рівнянь з запізненням. Так для рівняння

$$3y'''(t)+5y''(t)+17y'(t)+9y(t)+2y(t-19)=0$$

Тепер будуємо криву – годограф з характеристичним є квазіполіном $f(z)=9+2e^{-I9z}+17z+5z^2+3z^3$ на фінітній площині (Рис. 3).

Список використаних джерел

1. Філєр З.Ю. Проблеми нескінченності у математиці, фізиці та філософії// Комбінаторні конфігурації та їх застосування. 5-й Міжвузівський науково-практичний семінар. - Кіровоград: КК-ТК, 2008. – С. 84 – 95.