УДК 372.851:514

ДО ПИТАННЯ ВИВЧЕННЯ ПОНЯТТЯ ПОХІДНОЇ

Андрій Байсара

Науковий керівник: доктор педагогічних наук, профессор Кушнір В.А.

Центральноукраїнський державний педагогічний університет імені Володимира Винниченка, м.Кропивницький, Україна

У статті пропонується вивчати поняття похідної функції в шкільному курсі математики за допомогою представлення її у вигляді універсальної математичної моделі, яка описує різні фізичні процеси, для яких характерний зв'язок між кількісними характеристиками, аналогічний зв'язку між пройденим шляхом і швидкістю руху, наприклад, радіоактивний розпад, обертання тіла навколо своєї осі та ін. Особливу увагу в роботі приділено ролі вивчення поняття межі у формуванні математичних уявлень про похідну функції. Робота буде корисною для вчителів математики 10-11 класів при підготовці до уроків алгебри і початків аналізу, а також при організації курсів за вибором з математики в старших класах.

Ключові слова: функція, похідна, швидкість, математика, фізика, межа.

On the question of studying the concept of derivative

A. Baisara

Scientific supervisor: Doctor of Pedagogic Science, Professor Kushnir V.A.

The Volodymyr Vynnychenko Central Ukrainian State Pedagogical University, Kropyvnytsky, Ukraine

The paper proposes to examine the concept of the derivative of the function in the school course of mathematics by means of presenting it in the form of universal ma- thematical models describing various physical processes, which are characterized by the rela- tionship between the quantitative characteristics similar to the relation between the realized path and speed of motion, for example, radioactive decay, the rotation of the body around its axis, etc. Special attention is paid to the role of the study of the concept of limit in the forma- tion of the mathematical concepts of derivative of the function. The work will be useful for teachers of mathematics grades 10–11 in preparation for the lessons of algebra and the begin- ning of analysis, as well as the organization of elective courses in mathematics in high school.

Keywords: function, derivative, speed, mathematics, physics, limit.

Постановка проблеми. Більшість досліджуваних процесів, будь то соціальні, економічні або природні, моделюється за допомогою функцій, а аналіз і дослідження цих моделей дозволяють зробити висновки про характеристики та властивості розглянутих процесів, зрозуміти, як вони протікають і спрогнозувати їх стан в певний момент часу . В курсі математики 10-11 класів вивчаються різні властивості функцій: нулі функції, проміжки монотонності, знакосталості, опуклості (угнутості) і багато інших. Найважливіша роль у вивченні властивостей і особливостей функціональних залежностей відводиться дослідженню похідної функції, що має прикладне значення.

Виклад основного матеріалу (результатів) дослідження. Поняття похідної є основним поняттям диференціального обчислення і фундаментальним поняттям фізики, яка описує різні процеси і явища. Без чіткого розуміння, що таке похідна, неможливо успішне засвоєння диференціального й інтегрального числення, що вивчаються в курсі математичного аналізу або в курсі вищої математики у ВНЗ; тема «Похідна та її застосування» грає важливу роль у формуванні природничо світогляду учнів. Крім того, завдання на знаходження похідної та дослідження графіків з її допомогою присутні в ЗНО з математики, що робить вивчення похідної в 10-11 класах актуальним і значущим для школяра.

Формування поняття похідної відбувається з опорою на поняття межі, яке, на жаль, в шкільному курсі математики розглядається недостатньо докладно, що обумовлено, на наш погляд, трьома причинами: нерозумінням практико-орієнтованого сенсу межі (де і в якій сфері навколишньої дійсності він знаходить своє застосування); відсутністю завдань на обчислення меж в ЗНО і характерним математичним символізмом викладу теорії меж. Окреслені проблеми призводять до того, що вчителі нематематичних класів після введення поняття похідної на уроці практично відразу переходять до способів її обчислення, правилам, формулами і розгляду стандартних додатків похідної - її геометричному і механічному змістом.

Звернемося до питання, що являє собою похідна, яким чином вона вводиться в шкільному курсі математики. Найчастіше, її вивчення починається з рішення геометричній завдання про дотичній і фізичної задачі на знаходження швидкості, які, незважаючи на їх різний зміст, дозволяють привести учнів до нової математичної моделі [1, с. 65]. Вивчення теми «Похідна» може починатися після введення понять збільшення аргументу і приросту функції і формулювання правила її обчислення. На наш погляд, учням необхідно зрозуміти, що похідна функції $y = f(x)$ – це її характеристика, що показує, як змінюється функція в порівнянні з незначною зміною незалежної змінної. Для того щоб виміряти цю зміну, необхідно вибрати довільне число x, близьке до нього число $x+\Delta x$ і розглянути відношення

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\frac{\Delta f}{\Delta x} \tag{1}$$

Той факт, що ми розглядаємо точку $x + \Delta x$, достатньо близьку до точки x, в математиці записують як $\Delta x \to 0$. При $\Delta x = 0$ точки x і $x + \Delta x$ збігаються; при цьому будуть збігатися і значення функції $f(x + \Delta x)$ і $f(x)$.

Вираз $\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ називається середньою швидкістю зміни функції на відрізку $[x;\ x + \Delta x]$. Щоб обчислити миттєву швидкість зміни функції в заданій точці x, досить звести приріст аргументу Δx до нуля. Однак в цьому випадку ми отримуємо вираз $\frac{0}{0}$. Розподіл нуля на нуль, що виникає при визначенні похідної, представляло певні труднощі для вчених XVII століття; саме визна ня того, як слід розуміти значення дробу (1) при $\Delta x \to 0$, залишалося гордієвим вузлом диференціального обчислення. Проблема усунення невизначеності через поняття межі відношення (1) при $\Delta x \to 0$ знайшла своє рішення в роботі Коші «Резюме лекцій щодо обчислення нескінченно малих» в 1823 році [3, с. 130], в якій вводиться сучасне визначення похідної функції - швидкості зміни функції f (x) відносно змінної x в даній точці («миттєва швидкість» зміни функції) через межу відношення:

$$\lim_{\Delta x \to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=f'(x) \tag{2}$$

Таким чином, граничний перехід (2) дозволяє усунути невизначеність $\frac{0}{0}$. Сам термін «похідна» пояснюється тим, що з даної функції $y = f(x)$ за допомогою граничного переходу виводиться (або «виробляється») нова функція $f'(x)$. Ньютон називав похідну «флюент», тобто «витікає» [5, с. 205].

Відзначимо, що школярі також часто не розуміють сенсу поняття «миттєва швидкість» і як вона може розглядатися в конкретній точці, якщо середня швидкість розглядається на інтервалі. Насправді, знаходячи миттєву швидкість зміни функції, ми все також рас розглядаємо інтервал $[x; x+\Delta x]$, а за умови $\Delta x \to 0$ ми звужуємо його до тих пір, поки він не стане навіть при дуже великому збільшенні схожим на точку. І тоді зникає залежність значення середньої швидкості зміни функції від Δx [6, с. 11].

Проілюструємо вищесказане прикладом: нехай задана функція $y = \sqrt{x}$. Складемо для неї граничне співвідношення (2):

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{x+\Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x}.$$

Для обчислення цієї межі помножимо дріб на вираз, поєднане чисельнику, в результаті отримаємо:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{x+\Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(\sqrt{x+\Delta x} - \sqrt{x})(\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x})}{\Delta x(\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x})} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(\sqrt{x+\Delta x})^2 - (\sqrt{x})^2}{\Delta x(\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x})} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x+\Delta x - x}{\Delta x(\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x})} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

У шкільному курсі математики, стикаючись з похідною функції, учні, як правило, освоюють геометричні та фізичні застосування похідної, складаючи рівняння дотичній, досліджуючи функцію на монотонність, розглядаючи швидкість і прискорення об'єкта, що рухається прямолінійно. Однак на цьому додатки похідною не вичерпуються. Як зазначалося раніше, фізика як наука вивчає різні процеси, описувані функціональними залежностями, а, значить, знаходження похідних дозволяє виявити нові функції, також описують певні процеси чи явища. Отже, їх вивчення допомагає сформувати уявлення про похідної як про якоїсь універсальної математичної моделі, фізичний зміст якої залежить від того, який процес описує за допомогою (2) функція $y = f(x)$. Розгляд школярами похідною в заданому контексті призводить до усвідомлення ними міжпредметних зв'язків і дозволяє сформувати розуміння універсальності математичних законів.

Наведемо приклади таких процесів з описом того, що собою являють функції $f(x)$ і $f'(x)$ [4, с. 67]:

1. Прямолінійний нерівномірний рух.

Найпершим процесом, що підлягають вивченню, безумовно, є при- ляется прямолінійний рух. Нехай по прямій, на якій вибрано початок відліку, одиниця виміру і напрямок, рухається точка, і закон її руху задається формулою $s = s(t)$, де $s(t)$- координата точки на прямій в момент часу t. Переміщення точки за деякий проміжок часу дорівнює

$$\Delta s = s(t + \Delta t) - s(t)$$

Тоді середня швидкість дорівнює відношенню переміщення до довжини проміжку часу:

$$\upsilon_{сер} = \frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t} = \frac{\Delta s}{\Delta t}.$$

Миттєвою швидкістю $\upsilon_{мит}$ в момент часу t (точніше, числовим значенням швидкості в момент часу t) називається межа середньої швидкості руху при $\Delta t \to 0$:

$$\upsilon_{мит} = \upsilon(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \upsilon_{сер} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}.$$

Механічний зміст похідної полягає в тому, що при прямолінійному русі, описуваному функцією $s = s(t)$ числове значення швидкості в момент часу t дорівнює значенню похідної: $\upsilon_{мит} = s'(t)$.

2. Обертання тіла навколо своєї осі.

Обертання тіла навколо своєї осі задається функцією $y = \varphi(t)$, який описує кут повороту тіла в залежності від часу t. За деякий проміжок часу Δt кут повороту тіла складе $\Delta\varphi = \varphi(t+\Delta t) - \varphi(t)$, а середня кутова швидкість обертання буде дорівнює $\omega_{сер}$. Тоді миттєва швидкість обертання знаходиться за формулою:

$$\omega_{мит} = \lim_{\Delta t \to 0} \omega_{сер} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \varphi'(t).$$

3. Радіоактивний розпад.

$v = m'(t)$, де $m'(t)$ - маса речовини в момент часу t, $v(t)$ - швидкість радіоактивного розпаду.

4. Нагрівання тіла до температури T. $C(T) = Q'(T)$, де $Q(T)$- кількість теплоти, що повідомляється тілу при нагріванні його до температури t, $C(T)$ - теплоємність тіла.

5. Густина неоднорідного стрижня також описується за допомогою похідною: $\rho(x) = m'(x)$, де $m(x)$ - маса стрижня, кінці якого мають координати 0 і х (передбачається, що вісь Ох направлена уздовж стрижня), $\rho(x)$ - лінійна густина неоднорідного стрижня в точці х (довжина х).

6. Магнітний потік.

$\varepsilon(t) = \Phi'(t)$, де $\Phi(t)$- величина магнітного потоку в момент часу t, $\varepsilon(t)$- значення ЕРС індукції в момент t (швидкість зміни магнітного потоку).

7. Заряд в коливальному контурі.

$i(t) = q'(t)$, де $q(t)$- величина заряду на пластинах конденсатора коливального контуру в момент часу t, $i(t)$ - сила струму в контурі в момент часу t.

Як випливає з розглянутих прикладів, зв'язок між кількісними характеристиками багатьох процесів, досліджуваних фізикою, аналогічна зв'язку між пройденим шляхом і швидкістю руху матеріальної точки, що рухається прямолінійно і нерівномірно.

Висновки та перспективи подальших пошуків у напрямі дослідження. В статті зазначається, що основи шкільного курсу алгебри і математичного аналізу повинні забезпечувати своєчасну і якісну підготовку школяра до вивчення фізики. Ми вважаємо, що важливу роль у питанні реалізації міжпредметних зв'язків відіграє математичний інструментарій диференціального числення. Конструювання учителем уроку, присвяченого вивченню похідної функції і її фізичної інтерпретації, основу якого складає похідна як універсальна математична модель, що описує різноманітні фізичні процеси, сприяє, на наш погляд, формуванню інформаційної грамотності учнів при роботі з математичними моделями, що благотворно позначається на розумінні учнями 10-11 класів теми «Похідна та її застосування» та усвідомленні необхідності вивчення похідної для формування природничо-наукового світогляду.

Список використаної літератури:

1. Вендіна А. А., Севрюков П. Ф. Математичний аналіз для педагогів. Навчальний посібник. - Ставрополь 2017.

2. Джамбінов С. А., Сербіна Л. І. Проблема взаємопов'язаного вивчення дисциплін природничо-наукового циклу // Актуальні напрями наукових досліджень: від теорії до практики. 2016. № 1 (7). С. 112-113.

3. Дуран А. Світ математики: в 40 т. Т. 14. Істина в межі. Аналіз нескінченно малих / Пер. з ісп. - М .: Де Агостіні, 2014. 144 с.

4. Лепехіна Т. А. Математика. 10-11 класи. Межі та похідні: теорія і практика вирішення завдань. - Волгоград: Учитель, 2009. 153 с.

5. Пантано М. Ю. Матаналіз з людським обличчям, або Як вижити після граничного переходу: Повний курс математичного аналізу. Т. 1: Почала аналізу. Мова аналізу. Межа послідовності. Межа функції і безперервність. Похідна. Основні теореми диференціального числення. Застосування похідної. - М .: Книжковий дім «ЛІБРОКОМ», 2014. 370 с.

6. Севрюков П. Ф. Класична механіка. Критичне осмислення понять, визначень, теорем шкільного курсу. - М .: Ілекса; НДІ Шкільних технологій, 2009 року; Ставрополь: Сервісшкола, 2009. 140 с.