УДК 512.552.1

МІНОРИ НЕТЕРОВИХ НАПІВДОСКОНАЛИХ КІЛЕЦЬ

Ярмоленко Андрій

Науковий керівник: кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри математики Яременко Ю.В.

Центральноукраїнський державний педагогічний університет імені Володимира Винниченка, м. Кропивницький, Україна

В статті розглядаються основні факти теорії напівдосконалих кілець та модулів над ними, та основні леми і теореми теорії бірядних кілець. Приведено приклад побудови нетерового напівдосконалого кільця за даним сагайдаком.

Ключові слова: *кільце, модуль, пірсовський розклад, напівдосконале кільце, сагайдак.*

Minors of a noetherian semi-perfect rings

A. Yarmolenko

Scientific supervisor: Candidate of Physics and Mathematics Sciences, docent of mathematics chair Yaremenko Y.V.

The Volodymyr Vynnychenko Central Ukrainian State Pedagogical University, Kropivnitsky, Ukraine

This article deals with the basic facts of the theory of semi-perfect rings and the modules above them, as well as the main lemmas and theorems of the theory of biserial rings. An example of construction of a noetherian semi-perfect ring on this quiver is given.

Keywords: *ring, module, peirce decomposition, semi-perfect ring, quiver.*

Постановка проблеми. Розглянути основні факти теорії напівдосконалих кілець та їх сагайдаків, зокрема мінори нетерових бірядних кілець.

Аналіз досліджень і публікацій. Поняття напівдосконалого кільця ввів Басс у 1960 [23]. Напівдосконалі кільця та їх сагайдаки вивчалися у роботах [1, 5, 6, 9, 14, 20, 25].

У роботі [4] розглядаються напівдосконалі бірядні кільця. Тут вказана будова спадкових, напівспадкових бірядних кілець та кускових бірядних областей. В роботах [7; 10; 13; 16; 17; 21; 22; 29] вивчаються властивості нетерових бірядних кілець, та описано їх структуру.

В роботах [8; 12; 15; 18; 19; 22] вивчаються різні типи багатобірядних кілець, їх властивості та сагайдаки.

При вивченні бірядних та багаторядних кілець часто використовується метод сагайдаків. Поняття сагайдака скінченновимірної алгебри над полем введено П. Габріелем [28]. В. Кириченко переніс це поняття на напівдосконалі кільця [3].

У роботі [1] введено поняття бірядного сагайдака. У роботі [11] введено поняття багаторядного сагайдака.

Мета статті: привести приклади побудови нетерових напівдосконалих кілець за їх сагайдаками.

Виклад основного матеріалу (результатів) дослідження.

Означення. *Асоціативним кільцем з одиницею* називається непорожня множина A, на якій задано дві бінарні операції (множення і додавання), причому відносно додавання множина утворює абелева групу, а відносно множення – моноїд і додавання та множення пов'язані двома законами дистрибутивності

$$(a_1 + a_2) \cdot a_3 = a_1 \cdot a_3 + a_2 \cdot a_3$$
$$a_1 \cdot (a_2 + a_3) = a_1 \cdot a_2 + a_1 \cdot a_3,$$

для будь - яких елементів a_1, a_2, a_3 з множини A.

Приклади.

1). Множина Z цілих чисел утворює кільце відносно звичайних операцій додавання і множення.

2). Многочлени від одної змінної над полем K утворюють комутативне кільце $K[x]$.

3). $M_n(D)$ – множина квадратних матриць порядку n над тілом D, утворює кільце відносно звичайних операцій додавання і множення матриць.

4). Множина цілих комплексних чисел, тобто чисел $a + bi$, де a та b цілі числа утворює кільце (кільце цілих гаусових чисел).

Означення. Підгрупа I адитивної групи кільця A називається *правим (лівим) ідеалом кільця A*, якщо для будь-якого елемента $i \in I$ і будь-якого елемента $a \in A$ виконується умова $ia \in I$ $(ai \in I)$.

Означення. Підгрупа I, яка є одночасно правим і лівим ідеалом кільця, називається *двостороннім ідеалом кільця A* або просто *ідеалом*.

Означення. Адитивна абелева група M називається *правим A-модулем*, якщо кожній парі (m,a), де $m \in M$, а $a \in A$ співставлений однозначно певний елемент $ma \in M$, і при цьому виконуються умови:

1. $m(a_1+a_2)=ma_1+ma_2$,; *2.* $(m_1+m_2)a=m_1a+m_2a$;

3. $m(a_1a_2)=(ma_1)a_2$; *4.* $m * 1=m$;

для будь-яких $m,m_1,m_2 \in M$ і будь-яких $a,a_1,a_2 \in A$.

Аналогічно визначається поняття лівого A-модуля.

Якщо A – поле, то A-модуль є векторним простором.

Кільце можна розглядати як модуль над собою. Тоді праві (ліві) підмодулі кільця – це його праві (ліві) ідеали.

Означення. Елемент $e^2=e \in A$ називається і*демпотентом*.

Означення. Два ідемпотенти e і f називаються *ортогональними*, якщо $ef=fe=0$.

Означення. Рівність $1=e_1+\ldots+e_n$,, де $e_1,\ldots,e_n$– ідемпотенти кільця A, називається *розкладом одиниці кільця A*.

Лема 1 [2, 9]. *Якщо* $1=e_1+\ldots+e_n$ *– розклад одиниці кільця A , то* $A=\bigoplus_{i=1}^{n} e_i A$ $(A=\bigoplus_{i=1}^{n} Ae_i)$ *−розклад кільця A в пряму суму правих (лівих) ідеалів* e_iA (Ae_i).

Нехай $1=e_1+\ldots+e_n$ – розклад одиниці кільця A. Запишемо: $a=1a1=(e_1+\ldots+e_n)a(e_1+\ldots+e_n)=\sum_{i,j=1}^{n} e_i a e_j$. Отримали розклад кільця A в пряму суму абелевих груп e_iAe_j $(i,j=1,\ldots,n)$. Елементи із e_iAe_j позначимо через a_{ij}. Тоді будь-який елемент $a \in A$ зручно записувати у вигляді матриці. Кільце A зобразиться у вигляді кільця матриць з елементами із $A_{ij}=e_iAe_j$ з звичайними операціями додавання і множення матриць:

$$A=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \ldots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \ldots & A_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ A_{n1} & A_{n2} & \ldots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

Таке представлення називається *двостороннім пірсовським розкладом кільця A*.

Означення. Ненульовий модуль M називається *простим*, якщо у нього рівно два підмодулі (він сам і нульовий підмодуль).

Означення. Кільце називається *простим*, якщо в ньому немає відмінних від нуля двосторонніх ідеалів.

Означення. Модуль *M* називається *напівпростим*, якщо він розкладається в пряму суму простих модулів.

Означення. Кільце *A* називається *напівпростим справа*, якщо воно напівпросте як правий модуль над собою.

Означення. Модуль *M* називається *артиновим*, якщо кожна непорожня множина його підмодулів містить мінімальний елемент.

Означення. Модуль *M* називається *нетеровим*, якщо кожна непорожня множина його підмодулів містить максимальний елемент.

Лема 2 [2, 18]. *Модуль M є нетеровим (артиновим) тоді і лише тоді, коли кожен зростаючий (спадаючий) ланцюжок його підмодулів стабілізується.*

Означення. Кільце *A* називається *артиновим (нетеровим) справа,* якщо воно, розглянуте як правий модуль над собою, являється артиновим (нетеровим).

Наприклад, кільце цілих чисел *Z* - нетерове, але не артинове.

Лема 3 [2, 48]. *Якщо кільце A нетерове (артинове) справа, то кільця eAe і fAf – нетерові, (артинові) справа, fAf - модуль eAf та eAe - модуль fAe – скінченнопороджені. Навпаки, якщо ці умови виконуються для деяких ідемпотентів e і $f \in A$ таких, що $e+f=1$, то кільце A – нетерове (артинове) справа.*

Лема 4 [2, 48] (Накаяма). *Нехай M – скінченнопороджений A-модуль та $MR=M$. Тоді $M=0$.*

Означення. *Радикалом Джекобсона R* кільця *A* називається перетин всіх його максимальних правих ідеалів.

Означення. Кільце *A* називається *локальним*, якщо у нього всього один максимальний правий ідеал.

Тоді цей ідеал є радикалом Джекобсона *R* кільця *A*, тому у кільця *A* всього один максимальний лівий ідеал.

Означення. Кільце A називається *напівлокальним*, якщо факторкільце $\bar{A}=A/R$ артинове справа.

Означення. Ідемпотент $e\in A$ називається *локальним,* якщо кільце eAe локальне.

Означення. *Ідемпотенти можна піднімати за модулем ідеала I,* якщо з того, що $q^2-q\in I$ $(q\in A)$, випливає існування ідемпотента $e^2=e\in A$ такого, що $e-q\in I$.

Означення. Напівлокальне кільце A називається *напівдосконалим*, якщо ідемпотенти можна піднімати за модулем радикала Джекобсона R кільця A [23].

Означення. Напівдосконале кільце A називається *зведеним,* якщо факторкільце A/R є прямим добутком тіл.

Згідно теореми Моріти [29] категорія модулів над довільним напівдосконалим кільцем, натурально еквівалентна категорії модулів над зведеним кільцем. Тому при розгляді напівдосконалих кілець можна обмежитись зведеними кільцями, а це значить, що в розкладі напівдосконалого кільця A в пряму суму головних A-модулів немає ізоморфних. Отже, кільце A розкладатиметься в пряму суму головних модулів: $A=P_1\oplus\cdots\oplus P_s$.

Теорема 1 [5; 6]. *Будь-яке напівдосконале кільце A однозначно розкладається в скінченний прямий добуток нерозкладних кілець, тобто якщо* $A=B_1\times\cdots\times B_s=C_1\times\cdots\times C_t$ *два таких розклада, то s = t і існує підстановка* σ *чисел {1, ..., s} така, що* $B_i=C_{\sigma(i)}$ $(i=1,\ldots,s)$.

Означення. Підмодуль N модуля M називається *косуттєвим*, якщо з рівності $N+X=M$ слідує, що $X=M$ для довільного підмодуля X модуля M.

Означення. Модуль P називається *проективним*, якщо для будь-якого ізоморфізму φ модуля M на модуль N $(\varphi: M\to N)$ і для будь-якого гомоморфізму $\psi: P\to N$ існує гомоморфізм $h: P\to M$ такий, що $\psi=\varphi h$.

Означення. Проективний модуль $P=P(M)$ називається *проективним накриттям* модуля M, якщо існує епіморфізм $\varphi: P\to M$ такий, що $Ker\ \varphi$ – косуттєвий підмодуль в P.

Теорема 2 [23] (Басс). *Наступні умови рівносильні для кільця A:*

(а) кільце A напівдосконале;

(б) будь-який циклічний A-модуль має проективне накриття.

Означення. Нехай A – нетерове справа напівдосконале кільце, R – його радикал Джекобсона, $P_1, \ldots, P_s$ – всі попарно неізоморфні проективні нерозкладні модулі. Тоді проективне накриття $P(P_iR)$ модуля P_iR має вигляд:

$$P(P_iR)=\bigoplus_{j=1}^{s} P_j^{t_{ij}}, \quad (i,j = 1, \ldots, s).$$

Співставимо модулям $P_1, \ldots, P_s$ точки $1, \ldots, s$ і з'єднаємо вершину i з вершиною j t_{ij} стрілками. Отриманий граф називається *сагайдаком* нетерового справа напівдосконалого кільця A і позначається $K(A)$.

Аналогічно визначається лівий сагайдак $K'(A)$ нетерового зліва напівдосконалого кільця A.

Означення. Сагайдак називається *незв'язним,* якщо множину його точок можна розбити на дві множини, які не перетинаються і між якими немає стрілок.

У противному випадку сагайдак називається *зв'язним*.

Означення. Кільце називається *нерозкладним*, якщо його не можна представити у вигляді добутку двох ненульових кілець.

Теорема 3 [3]. *Наступні умови рівносильні для напівдосконалого нетерового кільця A:*

(а) A нерозкладне в прямий добуток кілець;

(б) A/R^2 нерозкладне в прямий добуток кілець;

(в) сагайдак кільця A зв'язний.

Означення. Модуль M називається *дистрибутивним,* якщо для будь-яких підмодулів K, L, N справедлива рівність $K \cap (L + N) = K \cap L + K \cap N$.

Зрозуміло, що будь-який підмодуль і будь-який фактормодуль дистрибутивного модуля дистрибутивні.

Означення. *Цоколем модуля* називається сума всіх мінімальних підмодулів цього модуля, тобто сума всіх простих модулів.

Теорема 4 [24]. *Модуль дистрибутивний тоді і тільки тоді, коли кожен його фактормодуль містить у своєму цоколі, з точністю до ізоморфізму, не більше одного примірника кожного простого модуля.*

Лема 5 [2, 47]. *Мають місце рівності* $U_i e_j = 0$, $e_j V_i = 0$ *при* $i \neq j$ *і* $U_i e_i = U_i$, $e_i V_i = V_i$ $(i,j = 1,\ldots,n)$.

Лема 6 [3]. *Простий модуль* U_k (V_k) *входить в прямий розклад модуля* e_iR/e_iR^2 (Re_i/R^2e_i) *тоді і тільки тоді, коли* $e_iR^2e_k$ $(e_kR^2e_i)$ *строго міститься в* e_iRe_k (e_kRe_i).

Означення. Модуль M називається *ланцюговим*, якщо структура його підмодулів лінійно впорядкована.

Означення. Пряма сума ланцюгових модулів називається *напівланцюговим модулем.*

Означення. Кільце A називається *напівланцюговим*, якщо воно являється напівланцюговим правим і напівланцюговим лівим модулем над собою.

Означення. Нерозкладний модуль M називається *бірядним*, якщо він (тобто структура його підмодулів) дистрибутивний і містить ланцюгові підмодулі K_1 і K_2 (можливо й рівні нулю) такі, що K_1+K_2 є M, або найбільший власний підмодуль в M, а $K_1 \cap K_2$ є нуль або найменший ненульовий підмодуль в M [5].

Лема 7 [5]. *Фактормодуль головного бірядного модуля – бірядний.*

Означення. Напівдосконале кільце A називається *бірядним*, якщо кожний правий і кожний лівий головний A-модуль бірядний [5].

Теорема 5 [5]. *Факторкільце бірядного справа (зліва) кільця A бірядне справа (зліва). Отже, факторкільце бірядного кільця бірядне.*

Теорема 6 [5]. *Нехай e – довільний ідемпотент бірядного кільця A. Тоді eAe являється бірядним кільцем.*

Теорема 7[5]. *Локальне бірядне кільце є ланцюговим.*

Теорема 8 [7]. *Нехай A – нетерове бірядне кільце. Тоді з кожної точки сагайдака кільця A виходить не більше двох стрілок і в кожну точку сагайдака кільця A входить не більше двох стрілок, причому з однієї точки в іншу (можливо й співпадаючу з першою) йде не більше однієї стрілки. Навпаки, якщо є скінченний граф, який задовольняє вказані умови, то існує бірядне кільце, сагайдаком якого є цей граф.*

Твердження 1 [6]. *Для нетерових кілець єдиний правий максимальний A_{jj} - підмодуль в A_{ij} співпадає з єдиним лівим максимальним A_{ii} - підмодулем в A_{ij}.*

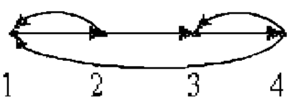
Лема 8 [6]. *Якщо із точки сагайдака нетерового бірядного кільця виходить одна стрілка, то головний модуль, що відповідає цій точці – ланцюговий.*

Означення. *Мінором n-го порядку* кільця A називається кільце ендоморфізмів B скінченно-породженого проективного A-модуля, який розкладається в пряму суму n – нерозкладних модулів [26].

Твердження 2. *Кожний мінор бірядного кільця є бірядним кільцем.*

Д о в е д е н н я випливає з теореми 6, яка стверджує, що для довільного ідемпотента e бірядного кільця A кільце eAe також бірядне.

Приклад. Знайти мінор нетерового напівдосконалого кільця A, яке має сагайдак $K(A)$:



Враховуючи теорему 8 даному сагайдаку відповідає мінор 4-го порядку нетерового бірядного кільця вигляду:

$$A = \begin{pmatrix} \vartheta_1 & A_{12} & A_{13} & A_{14} \\ A_{21} & \vartheta_2 & A_{23} & A_{24} \\ A_{31} & A_{32} & \vartheta_3 & A_{34} \\ A_{41} & A_{42} & A_{43} & \vartheta_4 \end{pmatrix},$$

де ϑ_i ($i = 1,\dots,4$) – дискретно нормоване кільце або однорядне кільце Кете, A_{ij} – ланцюговий лівий ϑ_i - модуль і ланцюговий правий ϑ_j - модуль. Причому на радикали Джекобсона R_i кілець ϑ_i і бімодулі A_{ij} накладені **наступні 14 умов:**

Так як кільце A – нетерове, то за лемою Накаями циклічний бімодуль A_{14} строго включає в себе підмодуль $A_{14}R_4$. Крім того, згідно твердження 1, $A_{14}R_4 = R_1A_{14}$. Оскільки із точки 1 в точку 4 немає стрілки, то фактормодуль $A_{14}/A_{14}R_4 + A_{12}A_{24} + A_{13}A_{34} = 0$, звідки отримаємо: $A_{14} = A_{12}A_{24} + A_{13}A_{34}$.

Із точки 1 в точку 3 немає стрілки, отже $A_{13}/R_1A_{13} + A_{12}A_{23} + A_{14}A_{43} = 0$ отримаємо $A_{13} = A_{12}A_{23} + A_{14}A_{43}$. Із точки 2 в точку 4 немає стрілки, отже $A_{24}/A_{21}A_{14} + R_2A_{24} + A_{23}A_{34} = 0$ і $A_{24} = A_{21}A_{14} + A_{23}A_{34}$.

Маємо $A_{13} = A_{12}A_{23} + (A_{12}A_{24} + A_{13}A_{34})A_{43}$.

Так як $A_{12}A_{23} \supseteq (A_{12}A_{24} + A_{13}A_{34})A_{43}$, то

1) $A_{13} = A_{12}A_{23}$.

2) $A_{14} = A_{12}A_{23}A_{34}$.

3) $A_{24} = A_{23}A_{34}$.

Аналогічно, із точки 3 в точку 1 немає стрілки, із точки 3 в точку 2 немає стрілки і із точки 4 в точку 2 немає стрілки, отримаємо ще три умови:

4) $A_{31} = A_{34}A_{41}$.

5) $A_{32} = A_{34}A_{41}A_{12}$.

6) $A_{42} = A_{41}A_{12}$.

В точці 1 немає петлі, тому $R_1/R_1^2 + A_{12}A_{21} + A_{13}A_{31} + A_{14}A_{41} = 0$.

Тоді, згідно леми Накаями, $R_1 = A_{12}A_{21} + A_{13}A_{31} + A_{14}A_{41}$. Враховуючи рівності 1) – 6) отримаємо:

7) $R_1 = A_{12}A_{21}$.

8) $R_2 = A_{21}A_{12}$.

9) $R_3 = A_{34}A_{43}$.

10) $R_4 = A_{43}A_{34}$.

Розглянемо головний модуль $P_1 = (\vartheta_1\ A_{12}\ A_{13}\ A_{14})$. Оскільки з точки 1 виходить одна стрілка, то він ланцюговий згідно леми 8.

Якщо $R_1 \neq 0$ і $A_{13} \neq 0$, то згідно лем 5 та 6 $P_1R^2 / P_1R^3 = u_1 + u_2$ – сума двох простих модулів, що неможливо для ланцюгового модуля.

Отже маємо:

11) $R_1 = 0$ або $A_{13} = 0$.

Аналогічно, розглянувши головний ланцюговий модуль $P_3 = (A_{31}\ A_{32}\ \vartheta_3\ A_{34})$ і його підмодулі $P_3\ R^2$ та P_3R^3 і фактормодуль P_3R^2 / P_3R^3 отримаємо

12) $R_3 = 0$ або $A_{31} = 0$.

Ті ж міркування щодо лівих ланцюгових модулів $Q_2 = \begin{pmatrix} A_{12} \\ \vartheta_2 \\ A_{32} \\ A_{42} \end{pmatrix}$ і $Q_4 = \begin{pmatrix} A_{14} \\ A_{24} \\ A_{34} \\ \vartheta_4 \end{pmatrix}$ приводять до умов:

13) $A_{24} = 0$ або $R_4 = 0$.

14) $R_2 = 0$ або $A_{42} = 0$.

Висновки та перспективи подальших пошуків у напрямі дослідження.

В роботі розглянуто основні факти теорії напівдосконалих кілець та їх сагайдаків. Зокрема розглянуто основні факти теорії бірядних кілець. Приведено приклад знаходження вигляду нетерового бірядного кільця, за даним його сагайдаком. В перспективі можна розглядати приклади побудови мінорів різних порядків нетерових напівдосконалих кілець за їх сагайдаками і навпаки будувати сагайдаки нетерових напівдосконалих кілець за їх двостороннім пірсовським розкладом.

Список використаної літератури

1. Данлыев Х.М., Кириченко В.В., Халецкая З.П., Яременко Ю.В. Слабопервичные полусовершенные 2-кольца и модули над ними // Сб. „Алгебраические исследования”. – Киев: Ин-т математики НАН Украины, 1995. – С. 5-32.
2. Кириченко В.В. Кольца и модули. – Киев: Изд-во Киев. ун-та, 1981. – 64 с.
3. Кириченко В.В. Обобщенно однорядные кольца // Мат. сб. – 1976. – Т. 99, № 4. – С. 559-581.
4. Кириченко В.В., Костюкевич П.П., Яременко Ю.В. Бирядные кольца и модули над ними // Алгебраические структуры и их применение. – К.: УМК ВО, 1988. – С. 43-74.
5. Кириченко В.В., Самир Валио, Яременко Ю.В. Полусовершенные кольца и их колчаны // Бесконечные группы и примыкающие алгебраические структуры. – К.: Ин-т математики АН Украины, 1993. – С. 438-456.
6. Кириченко В.В., Самир Валио, Яременко Ю.В. Колчаны полусовершенных колец // Доповіді АН України. – 1993. – №3. – С. 5-9.
7. Кириченко В.В., Яременко Ю.В. Нетеровы бирядные кольца // Укр. мат. журнал. – 1988. – Т.40, №4. – С. 435-440.
8. Кириченко В.В., Яременко Ю.В. Многорядные кольца // Укр. мат. журнал. – 1996. – Т. 48, № 9. – С. 1223-1235.
9. Кириченко В.В., Яременко Ю.В. О полусовершенных полудистрибутивных кольцах // Мат. заметки. - 2001. – Т.69, №1. – С. 153-156.
10. Яременко Ю.В Про нетерові бірядні кільця // Вісник КДУ. Математика і механіка. – 1989. – № 31. – С. 133-138.
11. Яременко Ю.В. Нетеровы полусовершенные полудистрибутивные кольца с многорядным колчаном // Доповіді НАН України. – 1997. – №5. – С. 54-57.

12. Яременко Ю.В. Первинні сагайдаки напівспадкових багаторядних кілець // Вісник Київського університету. Фізико-математичні науки. – 1999. – №2. – С. 59-65.

13. Яременко Ю.В. Мінори четвертого порядку нетерових бірядних кілець з ациклічним базовим сагайдаком // Вісник Київського університету. Фізико-математичні науки. – 2001. –№1. – С. 67-74.

14. Яременко Ю.В. Полусовершенные полудистрибутивные кусочные области // Доповіді НАН України. – 2001. – №3. –С. 31-34.

15. Яременко Ю.В. Багаторядні кускові області // Вісник Київського університету. Фізико-математичні науки. – 2002. – №4. – С. 50-55.

16.Яременко Ю.В. Мінори нетерових бірядних кілець // Наукові записки. Фізико-математичні науки. – Випуск 43. – Кіровоград, 2002. – С. 83-90.

17. Яременко Ю.В., Демченко Ю.М. Нетерові бірядні кільця з сильнозв’язним сагайдаком. // Наукові записки. Фізико-математичні науки. – Випуск 57. – Кіровоград, 2004. – С. 100-108.

18. Яременко Ю.В. Напівспадкові багаторядні кільця // Наукові записки. Серія: математичні науки. – Випуск 68. – Кіровоград, 2009. – С. 124-131.

19. Яременко Ю.В.. Нетерові багаторядні кільця // Наукові записки. Серія: математичні науки. – Випуск 72. – Кіровоград, 2013. – С. 68-78.

20. Яременко Ю.В. Напівдосконалі напівдистрибутивні кускові області // Наукові записки. Серія: математичні науки. – Випуск 73. – Кіровоград, 2014. – С. 80-88.

21. Яременко Ю.В. Про бірядні кільця // Наукові записки. Серія: математичні науки. – Випуск 74. – Кіровоград, 2016. – С. 88-95.

22. Яременко Ю.В. Кільця та модулі. – Кропивницький: Видавництво Центральноукраїнського ун-ту, 2018. – 187 с.

23. Bass H. Finitistic dimension and homological generalization of semiprimary rings // Trans. Amer. Math. Soc. – 1960. – V. 95. – P. 466-488.

24. Camillo V.P. Distributive modules // J.Algebra. – 1975. – V. 36, № 1. – P. 16-

25. Danlyev Kh.M., Kirichenko V.V., Yaremenko Yu.V. On weakly prime Noetherian semiperfect rings with two-generated right ideals // Доповіді НАН України. – 1996. – №12. – С. 7-9.

26. Drozd Yu. A. Minors and reduction theorems // Coll Math. Soc. J. Bolyai. – 1971. – V. 6. – P. 173-176.

27. Fuller K.R. Weakly symmetric rings of distributive module type // Comm. in Algebra. – 1977. – № 5. – P. 997-1008.

28. Gabriel P. Unzerlegbare Darstellungen I // Manuscripta Math. – 1972. – № 6. – P. 71-103.

29. Morita K., Duality for modules and its applications to the theory of rings with minimum condition // Sc. Rep. Tokyo Kyoiku Daigaku. 1958. – V. 6. – P. 83-142.

30. Yaremenko Yu.V. Noetherian semiperfekt rings of distributive module type // Mathematychni Studii. – 1997. – V. 8, №1. – P. 3-10.