

УДК 004.03

## СТВОРЕННЯ ГРАФІЧНОГО ДОДАТКУ ЗАСОБАМИ MAPLE ДЛЯ КОМП'ЮТЕРНОГО МОДЕЛЮВАННЯ СТОХАСТИЧНИХ ХВИЛЬ

Чуєнко Юрій

Науковий керівник: док. фіз.-мат. наук Плічко А.М.

*Центральноукраїнський державний педагогічний університет імені*

*Володимира Винниченка, м. Кропивницький, Україна*

*В роботі виконано огляд сучасних досліджень хвильових рухів, в тому числі і з використанням комп'ютерних технологій. Розглянуто математичну постановку задачі про поширення стохастичних хвиль в гідродинамічних системах «півпростір з вільною поверхнею» та «півпростір – півпростір» та реалізувати основні кроки розв'язування цієї задачі в CMS Maple. Отримано динамічні рівняння, які описують процес поширення хвиль в розглянутих системах.*

*Ключові слова: Maple, maplet, чисельні методи.*

## CREATION OF A GRAPHIC APPLICATION WITH MAPLE TOOLS FOR COMPUTER SIMULATION OF STOCHASTIC WAVES

Chuenko Yuriy

Scientific supervisor: A.M. Plichko, PhD

*Volodymyr Vynnychenko Central Ukrainian State Pedagogical University,*

*Kropyvnytskyi, Ukraine*

*The paper reviews modern research on wave motions, including the use of computer technology. The mathematical formulation of the problem of propagation of stochastic waves in hydrodynamic systems "half-space with free. surface "and" half-space - half-space "and implement the basic steps to solve this problem in CMS Maple. Dynamic equations describing the process of wave propagation in the considered systems are obtained.*

*Keywords: Maple, maplet, numerical methods.*

**Постановка проблеми.** З розвитком математичних пакетів різної спрямованості (CMS) виник інтерес до багатьох теоретичних та прикладних задач гідродинаміки, які раніше не досліджувались в силу складності реалізації

математичних методів. Сучасні системи комп'ютерної алгебри дають можливість швидко та ефективно реалізовувати різноманітні математичні моделі, які описують поширення хвиль в рідких середовищах. Використання сучасних інформаційних технологій є невід'ємною частиною моделювання навколишніх явищ та процесів. Застосування мов програмування та спеціально розроблених систем комп'ютерної математики (CMS) є необхідною складовою побудови будь-якої більш – менш точної математичної моделі явища чи процесу. Одним із потужних напрямків математичного моделювання, який розвивається саме завдяки широкому використанню програмних засобів, є моделювання хвильових рухів в різного типу рідких системах. Такий напрямок досліджень обумовлений і проблемами альтернативної енергетики, а саме задачею перетворення механічної енергії хвиль рідини в електроенергію.

#### **Аналіз досліджень і публікацій.**

У роботі [1] представлений новий чисельний метод дослідження вільних поверхневих хвиль в прибережних районах. Метод заснований на варіаційній моделі Буссінеска (VBM) з фазовою здатністю. У цій моделі було враховано негідростатичний тиск, щоб правильно описати динаміку коротких хвиль. В результаті запропонована схема здатна з великою точністю моделювати різні хвилі. Була продемонстрована здатність чисельної схеми моделювати ефекти дисперсії і нелінійності за допомогою моделювання поширення широкосмугових хвиль. Крім того, чисельна модель тестується для моделювання регулярного розбиття хвилі на плоскому пляжі Тинга і Кірбі, та для моделювання випадкової хвилі над залитим пляжем Бур

Робота [2] представляє собою реалізацію генерації і активного поглинання хвиль для довгих гребнів монохроматичних і випадкових хвиль другого порядку в моделі гідродинаміки на основі WCSPH (слабо стислива згладжена частка). Числовий потік нагадує фізичний хвильовий пристрій, такий що кордони, що рухаються, імітують дію генератора хвиль поршневого типу. Система генерації хвиль другого порядку, здатна генерувати як монохроматичні (регулярні), так і випадкові (нерегулярні) хвилі, реалізується спільно з пасивним і активним поглинанням хвиль. Ці реалізації

підтверджуються теоретичними розв'язками і експериментальними результатами щодо висоти поверхні води, орбітальних швидкостей хвиль.

Стаття [3] присвячена нелінійній взаємодії однорідних випадкових поверхневих хвиль океану. Були отримані численні кінетичні рівняння для вивчення еволюції спектральної щільності, в кожній з яких використовувалися дещо різні припущення. Використовуючи аналітичні та чисельні інструменти і аналізуючи точні розв'язки, продемонстровано, що недавно отримане узагальнене кінетичне рівняння демонструє вибух в кінцевий час для деяких вироджених квартетів хвиль.

У статті [4] теоретично описана інтерферометрія випадкових поверхневих гравітаційних хвиль, продемонстрована з використанням чисельного моделювання і досліджена експериментально з використанням дослідження океанських хвиль. Моделювання та вимірювання хвильового пакету добре узгоджуються з теоретичними результатами, але взаємні кореляції, засновані на вимірах океану, не дають передбаченої структури. Наводяться можливі пояснення такого явища.

У дослідженні [5] проводилися експерименти з CFD на випадкових хвилях для вивчення процесу навантаження хвилеріза з похилим верхом кесона. Чисельні результати показують, що, оскільки хвильова сила під гребенем зменшується, що призводить до руйнування структури в бік моря навіть під час відсутності сильного удару; цей висновок узгоджується з тим, що спостерігалось раніше, при аналізі відмов ряду вертикальних хвилерізів в першій половині 20-го століття. Нинішні результати також показують, що хвильові тиски під западиною можуть бути значно недооцінені за допомогою розрахункових формул, доступних в даний час. Щоб вирішити цю проблему, пропонується ряд простих альтернативних рівнянь, заснованих на концепції максимального потоку імпульсу.

Авторами дослідження [6] в великомасштабному басейні експериментально вивчається поширення односпрямованих глибоководних гравітаційних хвиль, стохастично модульованих по фазі. Спостерігається поява нелінійних локалізованих структур, які розвиваються на стохастичному

хвильовому полі. Таке співіснування розглядалося в рамках теорії інтегрованої турбулентності для нелінійного рівняння Шредінгера, і повідомлено про перше експериментальне спостереження в контексті гідродинамічних хвиль. Охарактеризовано формування, властивості і динаміку цих нелінійних когерентних структур (солітонів) на фоні некогерентних хвиль. Екстремальні хвилі виникають в результаті сильного загострення фронтів хвильових поїздів, і їх поява відбувається після приблизно однієї нелінійної шкали поширення. Солітони виникають, коли нелінійність і дисперсія слабкі. Охарактеризовано статистичні властивості цього стану. Знайдено, що кількість солітонів і екстремальних хвиль збільшується по всьому поширенню, розподіл хвильового поля має важкий хвіст, і спектр висот поверхні визначається масштабом як степеневий закон частоти з показником степеня  $-4,5 \pm 0,5$ . Більшість цих спостережень сумісні з теорією інтегрованої турбулентності, хоча деякі відхилення (наприклад, степеневий спектр, асиметричні екстремальні хвилі) є результатом ефектів, властивих гідродинамічним хвилям.

У роботі [7] запропонована і перевірена статистична теорія хвиль-вбивць на основі експериментальних даних, зібраних в довгому резервуарі для води, де механічно генеруються випадкові хвилі з різним ступенем нелінійності, які можуть вільно поширюватися уздовж потоку. Надано переконливі докази того, що хвилі-вбивці, які спостерігаються в акваріумі, є гідродинамічними інстантонами, тобто конфігураціями сідлової точки, пов'язаними зі стохастичною моделлю хвильової системи. В [8] наведено приклад застосування системи Maple до задач теорії графів з використанням маплетів.

**Мета статті:** показати можливості CMS Maple в задачах моделювання стохастичних хвильових рухів в рідких системах.

### **Основна частина.**

Досліджується задача про поширення внутрішніх хвиль в гідродинамічній системі «півпростір з вільною поверхнею» з рідким шаром  $\Omega_1 = \{(x, z) : |x| < \infty, |y| < \infty, -\infty < z < 0\}$  з густиною  $\rho_1$ . Шар  $\Omega_1$  обмежений зверху вільною поверхнею  $z = \eta(x, y, t)$ . Сила тяжіння направлена перпендикулярно

поверхні розподілу у від'ємному  $z$ -напрямку, рідина вважається нестисливою.

Математична постановка задачі має наступний вигляд:

швидкість поширення хвиль виражається через градієнт потенціалу і повинна задовольняти рівнянню

$$\varphi_{1,xx} + \varphi_{1,yy} + \varphi_{1,zz} = 0 \text{ у } \Omega_1,$$

кінематична умова на вільній поверхні

$$\eta_{,t} + \alpha \varphi_{1,x} \eta_{,x} + \alpha \varphi_{1,y} \eta_{,y} = \varphi_{1,z}, \text{ при } z = \alpha \eta(x, y, t),$$

динамічна умова на поверхні контакту

$$\varphi_{1,t} + (1 - \rho) \eta + \frac{\alpha}{2} (\nabla \varphi_1)^2 - (\eta_{,xx} + \eta_{,yy}) = 0, \text{ при } z = \alpha \eta(x, y, t)$$

гранична умова

$$\varphi_{1,z} \rightarrow 0 \text{ при } z \rightarrow -\infty,$$

тут  $\varphi_1$  потенціал швидкості частинок в  $\Omega_j$ ,  $\eta$  - відхилення вільної поверхні (хвильове стохастичне поле). Відмітимо, що дана постановка наведена в безрозмірному вигляді. Окремо вкажемо, що параметр  $\alpha$  є нечисловим параметром, введеним для врахування вкладу нелінійних доданків в подальших перетвореннях.

Також, розглянута задача про поширення внутрішніх хвиль в гідродинамічній системі «півпростір - півпростір» з рідким шаром  $\Omega_1 = \{(x, z) : |x| < \infty, |y| < \infty, -\infty < z < 0\}$  з густиною  $\rho_1$ , та рідким шаром  $\Omega_2 = \{(x, z) : |x| < \infty, |y| < \infty, 0 \leq z < +\infty\}$  з густиною  $\rho_2$ . Шари  $\Omega_1$  і  $\Omega_2$  розділені поверхнею контакту  $z = \eta(x, y, t)$ . Сила тяжіння направлена перпендикулярно поверхні розподілу у від'ємному  $z$ -напрямку, рідини вважаються нестисливими. Математична постановка задачі має наступний вигляд:

швидкість поширення пакетів у відповідних областях виражаються через градієнти потенціалів і повинні задовольняти рівнянням

$$\varphi_{1,xx} + \varphi_{1,yy} + \varphi_{1,zz} = 0 \text{ у } \Omega_1,$$

$$\varphi_{2,xx} + \varphi_{2,yy} + \varphi_{2,zz} = 0 \text{ у } \Omega_2,$$

кінематичні умови на поверхні контакту

$$\eta_{,t} + \alpha \varphi_{1,x} \eta_{,x} + \alpha \varphi_{1,y} \eta_{,y} = \varphi_{1,z}, \text{ при } z = \alpha \eta(x, y, t),$$

$$\eta_{,t} + \alpha \varphi_{2,x} \eta_{,x} + \alpha \varphi_{2,y} \eta_{,y} = \varphi_{2,z}, \text{ при } z = \alpha \eta(x, y, t),$$

динамічна умова на поверхні контакту

$$\varphi_{1,t} - \rho \varphi_{2,t} + (1 - \rho) \eta + \frac{\alpha}{2} (\nabla \varphi_1)^2 + \frac{\alpha}{2} \rho (\nabla \varphi_2)^2 - (\eta_{,xx} + \eta_{,yy}) = 0, \quad \text{при}$$

$$z = \alpha \eta(x, y, t)$$

граничні умови

$$\varphi_{1,z} \rightarrow 0 \text{ при } z \rightarrow -\infty,$$

$$\varphi_{2,z} \rightarrow 0 \text{ при } z \rightarrow +\infty.$$

тут  $\varphi_j$  ( $j=1,2$ ) потенціали швидкості частинок в  $\Omega_j$ ,  $\eta$  - відхилення поверхні контакту,  $\rho$  - відношення густини верхнього шару до густини нижнього шару. Відмітимо, що в дана постановка наведена в безрозмірному вигляді.

Дослідження вказаних задач призводить до наступного спектрального динамічного рівняння

$$W(q)S(q) = \int \frac{G(q, q_1)}{W(q)} S_{11}(q_1) S_{11}(q - q_1) dq_1 - S_{11}(q) \int F(q, q_1) S_{11}(q_1) dq_1.$$

Почнемо реалізацію функцій для аналізу поширення випадкових хвиль.

*restart;*

*with(plots);*

*f2 := unapply(1/2\*(w1^2-w1\*w+w^2-w1\*(w-w1)\*(k\*cos(t1-t)-k1)/sqrt(k^2+k1^2-2\*k\*k1\*cos(t1-t))-w\*w1\*cos(t1-t)-w\*(w-w1)\*(k-k1\*cos(t1-t))/sqrt(k^2+k1^2-2\*k\*k1\*cos(t1-t))), k, w, t, k1, w1, t1);*

*W := unapply(1-w^2/k, k, w, t, k1, w1, t1);*

*G := unapply(2\*(f2(k, w, t, k1, w1, t1)/W(k, w, t, k1, w1, t1))^2, k, w, t, k1, w1, t1);*

*ForGR := unapply(G(sqrt(k1^2+k2^2+2\*k1\*k2\*cos(t1-t2))), w1+w2, arccos((k1\*cos(t1)+k2\*cos(t2))/sqrt(k1^2+k2^2+2\*k1\*k2\*cos(t1-t2))), k1, w1, t1, k1, w1, t1, k2, w2, t2);*

*Rezalt := unapply(ForGR(1, 1, 0, w2^2, w2, t2), w2, t2);*

*Tmax := Pi; Wmax := 3; Wmin := -1;*

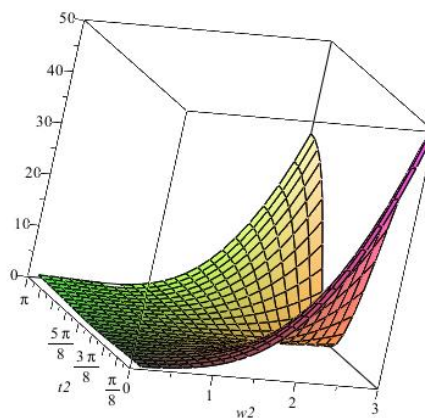


Рис.1. Тривимірна характеристика поширення стохастичних хвиль

Для подальшого моделювання нам необхідно отримати можливість будувати лінії рівня для поверхні з рис. 1.

```
gr1 := implicitplot(Rezalt(w2, t2) = 0.1e-1, t2 = 0 .. Tmax, w2 = Wmin .. Wmax, color = red, numpoints = 100000);
```

```
gr2 := implicitplot(Rezalt(w2, t2) = 0.5e-1, t2 = 0 .. Tmax, w2 = Wmin .. Wmax, color = red, numpoints = 100000, color = blue);
```

```
gr3 := implicitplot(Rezalt(w2, t2) = .1, t2 = 0 .. Tmax, w2 = Wmin .. Wmax, numpoints = 100000, color = black);
```

```
gr4 := implicitplot(Rezalt(w2, t2) = .25, t2 = 0 .. Tmax, w2 = Wmin .. Wmax, numpoints = 100000, color = green);
```

```
gr5 := implicitplot(Rezalt(w2, t2) = .5, t2 = 0 .. Tmax, w2 = Wmin .. Wmax, color = red, numpoints = 100000, color = "Cyan");
```

```
gr6 := implicitplot(Rezalt(w2, t2) = 1, t2 = 0 .. Tmax, w2 = Wmin .. Wmax, numpoints = 100000, color = yellow);
```

```
gr7 := implicitplot(Rezalt(w2, t2) = 5, t2 = 0 .. Tmax, w2 = Wmin .. Wmax, numpoints = 100000, color = "Violet");
```

```
gr8 := implicitplot(Rezalt(w2, t2) = 10, t2 = 0 .. Tmax, w2 = Wmin .. Wmax, numpoints = 100000, color = "Brown");
```

```
gr9 := implicitplot(Rezalt(w2, t2) = 30, t2 = 0 .. Tmax, w2 = Wmin .. Wmax, numpoints = 100000, color = "RosyBrown");
```

Виконання коду наведеного вище дасть можливість отримати наступне зображення:

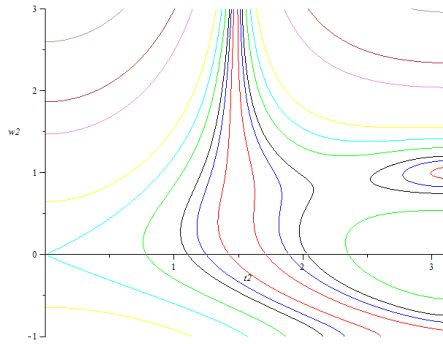


Рис. 2. Лінії рівня.

### **Висновки та перспективи подальших пошуків у напрямі дослідження**

Використання візуального програмування в середовищі Maple для математичного моделювання реальних явищ та процесів має ряд переваг, порівняно з використанням інших мов програмування, як то C, Python та ін.

Більшість задач, пов'язаних з математичним моделюванням призводить до дослідження диференціальних рівнянь та систем таких рівнянь, в тому числі і в частинних похідних. Maple має вже готові вбудовані функції для роботи з такими математичними об'єктами, і, що важливо, в символному вигляді. Це значно полегшує роботу, особливо у випадку наявності точних аналітичних або наближених аналітичних розв'язків. При аналізі математичних моделей дуже часто доводиться використовувати якісні методи дослідження, пов'язані з візуалізацією отриманих числових або аналітичних даних. Система Maple має потужний інструментарій для створення та обробки візуальної інформації (побудова двомірної та тривимірної графіки тощо). Створення візуальних середовищ для дослідження математичних моделей дає можливість вивчати поведінку досліджуваного явища чи процесу для багатьох наборів вхідних параметрів, що вирішується за допомогою створення мап летів, які по суті є користувацьким інтерфейсом при роботі з конкретними моделями.

### **Список використаної літератури**

1. Adytia D., Pudjaprasetya S.R., Tarwidi D. Modeling of wave run-up by using staggered grid scheme implementation in 1D Boussinesq model / D. Adytia, S.R. Pudjaprasetya, D. Tarwidi // Computational Geosciences. – 2019. – Vol. 23, Issue 4. – P. 793-811. doi: 10.1007/s10596-019-9821-5
2. Altomare C., Dominguez J.M., Crespo A.J.C., Gonzalez-Cao J., Suzuki T., Gomez-Gesteira M., Troch P. Long-crested wave generation and absorption for SPH-based DualSPHysics



- model] / C. Altomare, J.M. Dominguez, A.J.C. Crespo, J. Gonzalez-Cao, T. Suzuki, M. Gomez-Gesteira, P. Troch // Coastal Engineering. – 2017. – Vol. 127. – P. 37-54. doi: 10.1016/j.coastaleng.2017.06.004
3. Andrade D., Stuhlmeier R., Stiassnie M. On the Generalized Kinetic Equation for Surface Gravity Waves, Blow-Up and Its Restraint / D. Andrade, R. Stuhlmeier, M. Stiassnie // Fluids. – 2018. – Vol. 4, Issue 1. – doi: 10.3390/fluids4010002
  4. Brown M.G., Lu C. Green's function retrieval in a field of random water waves / M.G. Brown, C. Lu // Wave Motion. – 2016. – Vol. 60. – P. 8-19. doi: 10.1016/j.wavemoti.2015.08.003
  5. Buccino M., Daliri M., Dentale F., Di Leo A., Calabrese M. CFD experiments on a low crested sloping top caisson breakwater. Part 1. nature of loadings and global stability / M. Buccino, M. Daliri, F. Dentale, A. Di Leo, M. Calabrese // Ocean Engineering. – 2019. – Vol. 182. – P. 259-282. doi: 10.1016/j.oceaneng.2019.04.017
  6. Cazaubiel A., Michel G., Lepot S., Semin B., Aumaitre S., Berhanu M., Bonnefoy F., Falcon E. Coexistence of solitons and extreme events in deep water surface waves / A. Cazaubiel, G. Michel, S. Lepot, B. Semin, S. Aumaitre, M. Berhanu, F. Bonnefoy, E. Falcon // Physical review fluids. – 2018. – Vol. 3, Issue 11. doi: 10.1103/PhysRevFluids.3.114802
  7. Dematteis G., Grafke T., Onorato M., Vanden-Eijnden E. Experimental Evidence of Hydrodynamic Instantons: The Universal Route to Rogue Waves / G. Dematteis, T. Grafke, M. Onorato, E. Vanden-Eijnden // Physical review X. – 2019. – Vol. 9, Issue 4. doi: 10.1103/ doi: 10.1103/PhysRevX.9.041057
  8. М. Н. Кирсанов. Графы в Maple. М.: Физматлит, 2007, 168с.