УДК 519.21

ПОГЛИБЛЕННЯ НЕРІВНОСТІ ЧЕБИШЕВА ДЛЯ РОЗПОДІЛУ З ЕКСПОНЕНЦІАЛЬНИМ ТИПОМ ЩІЛЬНОСТІ

Макарчук Олег, Туркулець Андрій

Науковий керівник: канд.-ф.-м. наук, доцент Макарчук О.П.

Центральноукраїнський державний педагогічний університет імені Володимира Винниченка, м. Кропивницький, Україна

В статті представлено поглиблення ймовірнісної нерівності Чебишева для одного абсолютно неперервного розподілу з експоненціальним типом щільност розподілуі. Акцент здійснюється на абсолютно неперервний розподіл з необмеженим спектром. Ідентифікуються оцінки, що є кращими по відношенню до оцінок породжених класичною ймовірнісною нерівність Маркова-Чебишева. Щільність ймовірнісного розподілу, що має експоненціальну структуру передбачає можливість явного знаходження функції розподілу та аналізу функції відхилень.

Ключові слова: щільність розподілу, нерівність Чебишева, дискретний розподіл, функція розподілу, абсолютно неперервний розподіл, математичне сподівання.

Deepening of Chebyshev inequality for distribution with exponential density type

O Makarchuk, A Turkulets

Scientific supervisor: Candidate of Physics and Mathematics Science Makarchuk O.P.

Volodymyr Vynnychenko Ukrainian State Pedagogical University, Kropyvnystky, Ukraine

The paper presents the deepening of the Chebyshev probabilistic inequality for one absolutely continuous distribution with an exponential type of distribution density. The emphasis is on a completely continuous distribution with an unlimited spectrum. The estimates that are better in relation to the estimates generated by the classical Markov-Chebyshev probability inequality are identified. The density of the probability distribution, which has an exponential *structure, presupposes the possibility of explicitly finding the distribution function and analyzing the deviation function.*

Keywords: distribution density, Chebyshev inequality, discrete distribution, distribution function, absolutely continuous distribution, mathematical expectation.

1. Аналіз досліджень і публікацій. Нерівність Чебишева [5] в теорії ймовірностей стверджує, що випадкова величина в основному приймає значення, близькі до свого середнього. А точніше, воно дає оцінку ймовірності того, що випадкова величина прийме значення, далеке від свого середнього. Нерівність Чебишева є наслідком нерівності Маркова і має вигляд:

$$P\left(\left|\xi - M_{\xi}\right| \geq k\sigma_{\xi}\right) \leq \frac{1}{k^2},\ \ k > 0.$$

Уточненням нерівності Чебишева, або ще в деяких джерелах його називають нерівністю Чебишева-Бйенеме є нерівність Височанського-Петуніна.

Нерівність Височанського – Петунін має наступне формулювання:

$$P\left(\left|\xi - M_{\xi}\right| \geq k\sigma_{\xi}\right) \leq \frac{4}{9k^2},\ \ k > \sqrt{\frac{8}{3}}$$

для уномодальних абсолютно неперервних величин, тобто для випадкових величин, щільності яких мають єдину точку локального максимуму.

Показано також, що в разі, коли $k \leq \sqrt{\frac{8}{3}}$, існують несиметричні розподілу, для яких кордон $\frac{4}{9k^2}$ порушується, що потребує безумовно уточнення для деяких класичних ймовірнісних розподілів. Дана теорема підсилює нерівність Чебишева, включаючи в себе дріб $\frac{4}{9}$, за рахунок того, що накладається обмеження одномодальності на щільність розподілу випадкової величини.

Однак є цілком природним питанням є поглиблення нерівності Чебишева в класі розподілів з щільностями певного аналітичного типу.

Мета роботи: перевірити та поглибити нерівність Чебишева для розподілу з експоненціальним типом щільності розподілу.

Проблема дослідження: поглиблення нерівності Чебишева для абсолютно неперервного розподілу з експоненціальним типом щільності.

2. Поглиблення нерівності Чебишева –Маркова.

Нехай абсолютно неперервна випадкова величина задана щільністю:

$$p_\xi(x) = 0{,}5e^{-|x|}$$

Потрібно відмітити, що на щільність розподілу накладається дві умови: умова невід'ємності майже скрізь і нормуюча умова.

Умова невід'ємності очевидно виконується причому скрізь. Знайдемо коефіцієнт з нормуючої умови:

$$1 = \int_{-\infty}^{+\infty} p_\xi(x)\,dx = 2\int_{0}^{+\infty} 0{,}5e^{-x}\,dx = -e^{-x}\big|_0^{+\infty} = 1.$$

Знайдемо точне значення математичного сподівання та дисперсії:

$$M_\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} xp_\xi(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} 0{,}5xe^{-|x|}\,dx = 0$$

$$M_{\xi^2} = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2p_\xi(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} 0{,}5x^2e^{-|x|} = 2\int_{0}^{+\infty} 0{,}5x^2e^{-x}\,dx$$
$$= -(x^2+2x+2)e^{-x}\big|_0^{+\infty} = 2$$

Значення дисперсії відповідно дорівнює:

$$D_\xi = M_{\xi^2} - M_\xi^2 = 2.$$

Значення середнього квадратичного відхилення відповідно дорівнює:

$$\sigma_\xi = \sqrt{2}.$$

Маємо:

$$P\left(\left|\xi - M_\xi\right| \geq k\sigma_\xi\right) = P\left(|\xi| \geq k\sqrt{2}\right) = 2\int_{k\sqrt{2}}^{+\infty} 0{,}5e^{-x}\,dx = -e^{-x}\Big|_{k\sqrt{2}}^{+\infty} = e^{-k\sqrt{2}}$$

Для нерівності Височанського – Петуніна маємо

$$P\left(\left|\xi - M_\xi\right| \geq k\sigma_\xi\right) \leq \frac{1}{k^2},\ \ k > 0$$

і відповідно

$$e^{-k\sqrt{2}} \leq \frac{1}{k^2}$$

Побудуємо графіки функцій

$$f(k) = e^{-k\sqrt{2}}$$

$$g(k) = \frac{1}{k^2}$$

Також введемо функцію

$$h(k) = e^{-k\sqrt{2}}k^2$$

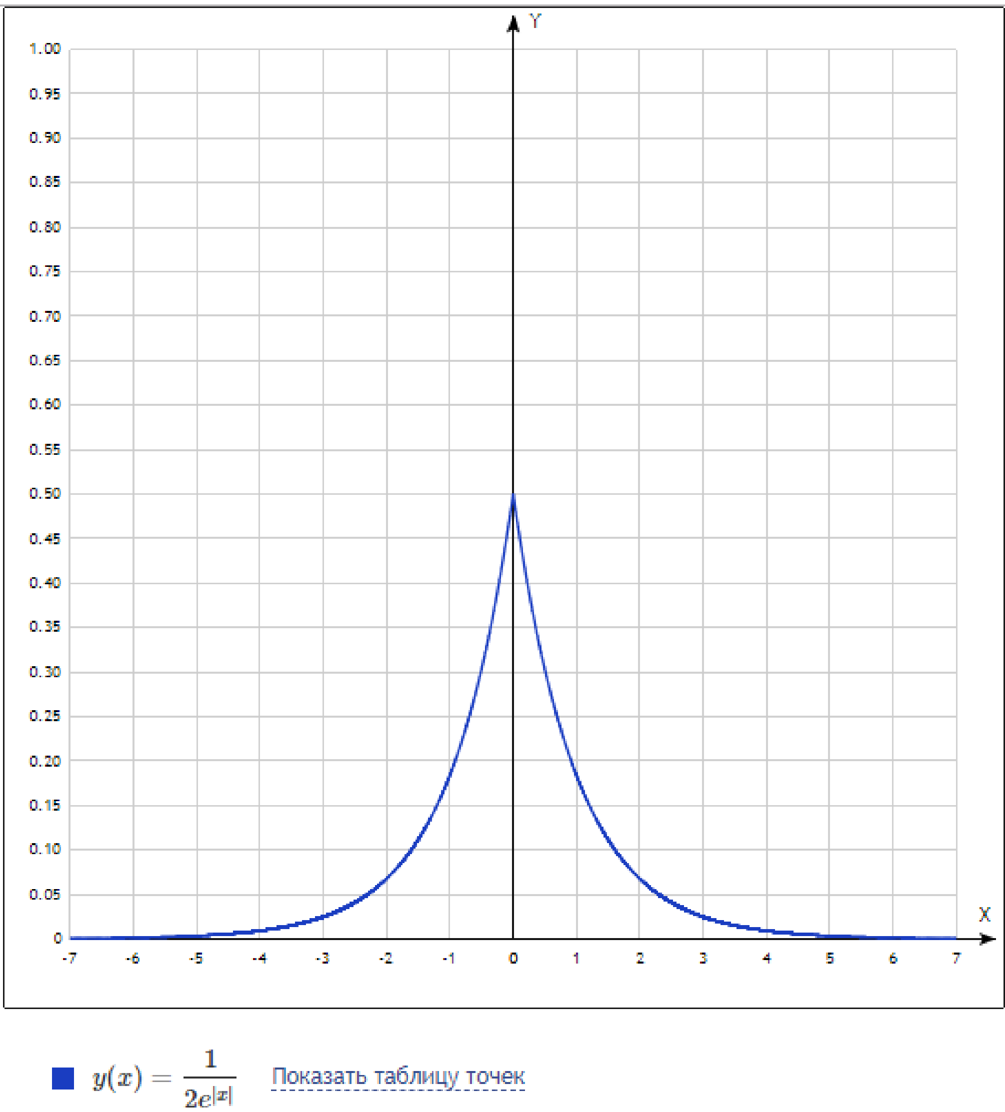

Рис 1. Графік $p_\xi(x)$.

По відповідному наступному рисунку графіків функцій $f(k) = e^{-k\sqrt{2}}, g(k) = \frac{1}{k^2}$ видно, що нерівність

$$e^{-k\sqrt{2}} \leq \frac{1}{k^2}$$

виконується для всіх додатніх значень k

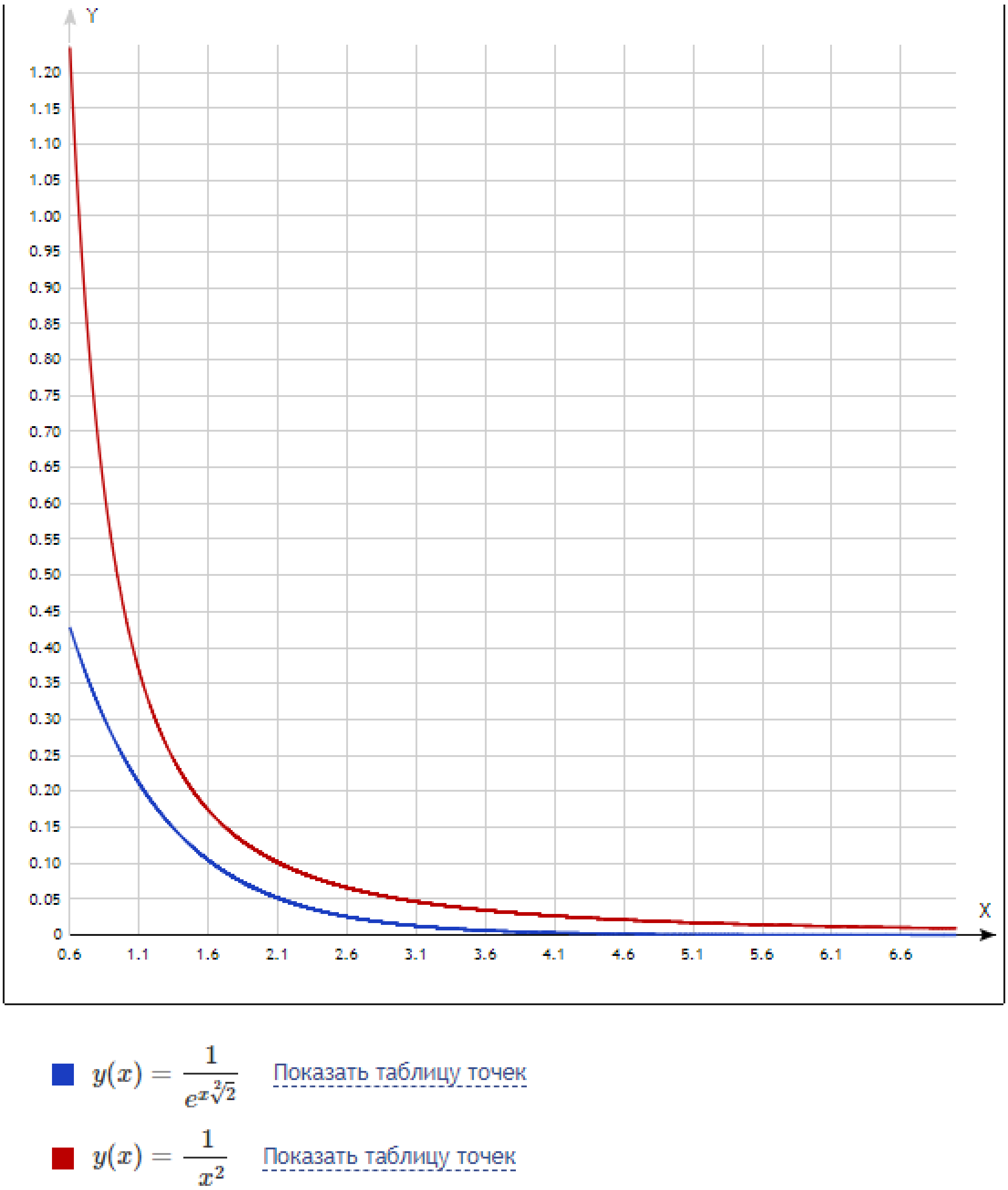

Рис 16. Графік $f(k) = e^{-k\sqrt{2}}, g(k) = \frac{1}{k^2}$

Розглянемо графік функції

$$h(k) = e^{-k\sqrt{2}}k^2.$$

в розумінні найбільшого та найменшого значення.

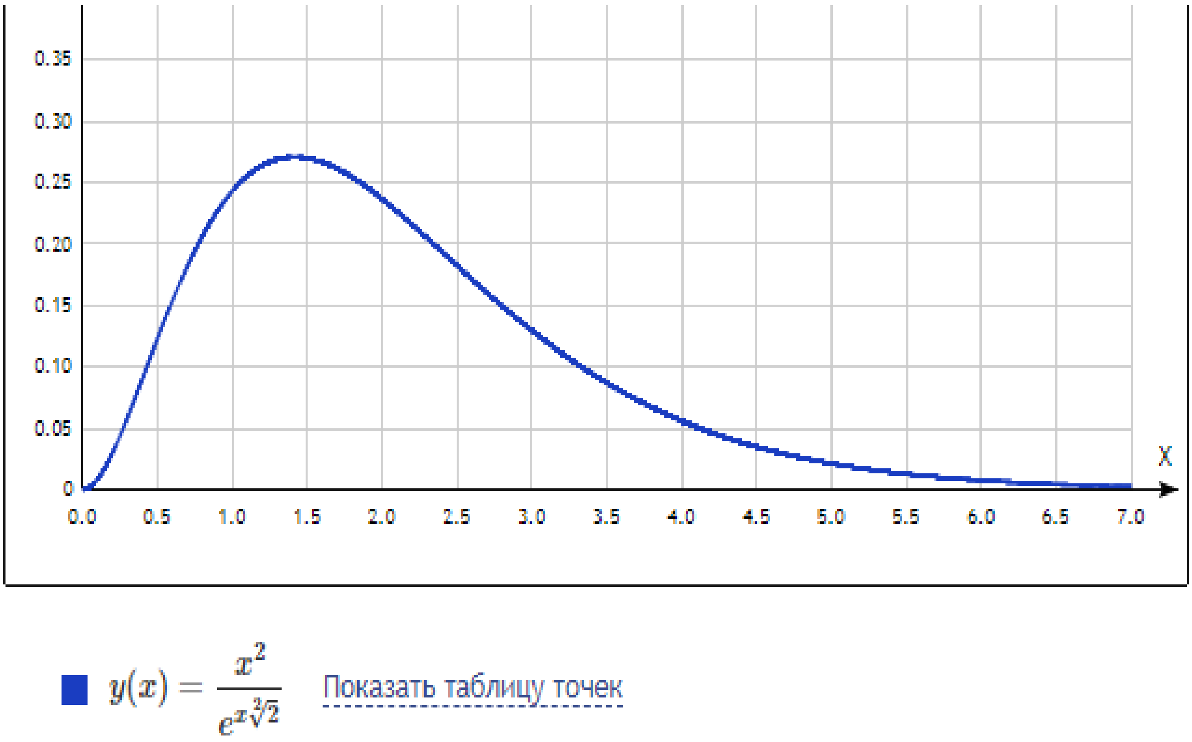

Рис 17. Графік $h(k) = e^{-k\sqrt{2}}k^2$.

По відповідному графіку видно, що існує максимум на рівні $0{,}2731$, що менше значення $\frac{4}{9} \approx 0{,}44$.

Знайдемо точне значення максимума:

$$\left(h(k)\right)' = 0$$

$$-\sqrt{2}e^{-k\sqrt{2}}k^2 + 2e^{-k\sqrt{2}}k = 0,$$

$$k = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Відповідне максимальне значення:

$$h\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 0{,}5e^{-1}.$$

Висновки. Таким чином, для розподілу з щільністю

$$p_\xi(x) = 0{,}5e^{-|x|}$$

нерівність Чебишева має поглиблення :

$$P\left(\left|\xi - M_\xi\right| \geq k\sigma_\xi\right) \leq \frac{1}{2ek^2}, \quad k > 0.$$

Відкритою залишається проблема знаходження оцінок в поглибленні нерівності Чебишева для конкретних класів випадкових величин, зокрема сингулярних.

Список літератури

1. Валтер Я. Стохастические модели в экономике. − М.: Статистика, 1976. − 232 с.
2. Вентцель А. Д. Курс теории случайных процессов. – М.: Наука, 1975. − 320 с.
3. Гнеденко Б.В. Курс теории вероятностей. –М.: Наука, 1988. – 448 с.
4. Колмогоров А.Н. Основные понятия теории вероятностей. – М.: Наука, 1974. –120 с.
5. Розанов Ю. А. Случайные процессы. Краткий курс. – М.: Наука, 1979. − 184 с .