УДК 519.21

ОЦІНКИ АПРОКСИМАЦІЇ РІВНОМІРНОГО РОЗПОДІЛУ ЧАСТКОВИМИ СУМАМИ ДВІЙКОВОГО РЯДУ

Таранюк Анастасія

Науковий керівник: канд.-ф.-м. наук, доцент Халецька З.П.

Центральноукраїнський державний педагогічний університет імені Володимира Винниченка, м. Кропивницький, Україна

В статті представлено оцінки відхилень розподілу часткових сум випадкового ряду, породженого двійковим розкладом, по відношенню до рівномірного розподілу. Акцент здійснюється на випадковий ряд, породжений класичним двійковим розкладом дійсних чисел відрізку [0;1] з незалежними в сукупності ймовірнісними доданками. Відповідний розподіл, який є граничним по відношенню до двійкового випадкового ряду є рівномірним на своїму спектрі, який співпадає з відрізком [0;1]. В процесі аналізу використовувались формули згортки дискретних ймовірнісних розподілів.

Ключові слова: рівномірний розподіл, двійковий ряд, дискретний розподіл, функція розподілу, часткові суми, математичне сподівання.

Estimates of approximation of uniform distribution by partial of a binary series

A Taranyuk

Scientific supervisor: Candidate of Physics and Mathematics Science Khaletskaya Z. P.

Volodymyr Vynnychenko Ukrainian State Pedagogical University, Kropyvnystky, Ukraine

The article presents estimates of deviations in the distribution of partial sums of a random series generated by a binary schedule with respect to a uniform distribution. The emphasis is on the random series generated by the classical binary decomposition of real numbers of the segment [0; 1] with independent probabilistic terms. The corresponding distribution, which is boundary with respect to the binary random series, is uniform in its *spectrum, which coincides with the segment [0; 1]. The analysis used convolution formulas of discrete probability distributions.*

Keywords: uniform distribution, binary series, discrete distribution, distribution function, partial sums, mathematical expectation.

1. Постановка проблеми.

Розподіли випадкових рядів, які зокрема включають сингулярні функції, які спочатку були функціями в існування яких важко було повірити, є актуальним об'єктом теорії ймовірностей. Сама назва функції Кантора як «чортові сходинки» вдало вказувало на це. Безумовно, поява сингулярних функцій була сприйната реакцією, що вони є аномальними об'єктами. Однак в багатьох випадках сингулярність є домінуючим явищем, більш того теорема А.Замфіреску, яка стверджувала, що множина сингулярних функцій в метричному просторі функцій з сопремум метрикою складає другу категорію Бера, тобто складає більшість в топологічному розумінні вказує на те, що сингулярними функціями аж ніяк не можна нехтувати.

Сингулярні функції, так само як і сингулярні міри вважаються незвичайним математичним об'єктом, незважаючи на їх повноправну участь в розкладанні функції Лебега обмеженої варіації на три складових.

Хоча більшість сингулярних розподілів характеризується представленням у вигляді випадкових рядів, проблема оцінки збіжності часткових сум відповідних випадкових рядів до граничного розподілу залишається відкритою.

Робота присвячена проблемі знаходження оцінок асимптотики збіжності часткових сум двійкового випадкового ряду до граничного рівномірного розподілу.

Об'єкт дослідження: рівномірний на відрізку $[0;1]$ ймовірнісний розподіл.

Предмет дослідження: випадковий ряд породжений двійковим розкладом дійсних чисел.

Мета дослідження: знайти оцінки відхилень розподілу часткових сум випадкового ряду, породженого двійковим розкладом, по відношенню до рівномірного розподілу.

Результати дослідження можуть бути використані при уточненні довірчих інтервалів статистичних критерії, породжених дискретними та абсолютно неперервними розподілами.

2. Аналіз апроксимацій двійкового ряду частковими сумами.

Таким чином, розподіл випадкової величини

$$\tau = \frac{\tau_1}{2^1} + \frac{\tau_2}{2^2} + \cdots + \frac{\tau_n}{2^n} + \cdots,$$

де $\tau_n -$ послідовність незалежних в сукупності випадкових величин, які набувають значень 0 та 1 з ймовірностями відповідно є рівномірним на відрізку $[0; 1]$.

Розглянемо часткові суми ряду

$$\varphi_n = \frac{\tau_1}{2^1} + \frac{\tau_2}{2^2} + \cdots + \frac{\tau_n}{2^n}$$

та відповідної їх функції розподілу

$$F_{\varphi_n}(x) = P(\varphi_n < x).$$

Введемо величину похибки наступним чином:

$$\Delta_n(\tau) = \sup_R |F_{\varphi_n}(x) - F_\tau(x)|$$

Однак почнемо з побудови і аналізу рівномірного розподілу.

Одним з перших прикладів абсолютно неперервного розподілу є ***<u>рівномірний на відрізку</u>*** $[a; b]$ розподіл, який класично позначається наступним чином

$$\xi \in U_{[a;b]}$$

Потрібно відмітити, що у цьому випадку щільність розподілу має вигляд.

$$p_\xi(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, x \in [a;b] \\ 0, x \notin [a;b] \end{cases}$$

Функція розподілу має наступний вигляд.

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0, x \in [-\infty; a] \\ \dfrac{x-a}{b-a}, x \in [a;b] \\ 1, x \in [b; +\infty] \end{cases}$$

Потрібно розуміти, що геометричний розподіл моделює відоме геометричне означення ймовірності в одновимірному евклідовому просторі, тобто в просторі в якому множиною точок простору є відрізок, а відповідною метрикою є правило за яким відстань між двома точками рахується як довжина відрізка з кінцями і відповідних точках.

Для того, щоб уявити відповідний розподіл побудуємо відповідні графіки щільностей та функції розподілу і розглянемо рівномірний розподіл на відрізкі $[0; 1]$.

У цьому випадку аналітичні вирази для щільності та функції розподілу мають вигляд:

$$p_\tau(x) = \begin{cases} 1, x \in [0;1] \\ 0, x \notin [0;1] \end{cases}$$

Функція розподілу має наступний вигляд.

$$F_\tau(x) = \begin{cases} 0, x \in [-\infty; 2] \\ \dfrac{x-0}{1-0}, x \in [2;6] \\ 1, x \in [6; +\infty] \end{cases}$$

Для побудови кускового лінійного графіка необхідно використати наступну команду

Piecewise[{{0, x<0},{1, 0<=x<=1}, {0, x>1}}] from -5 to 10

В результаті отримаємо наступний графік

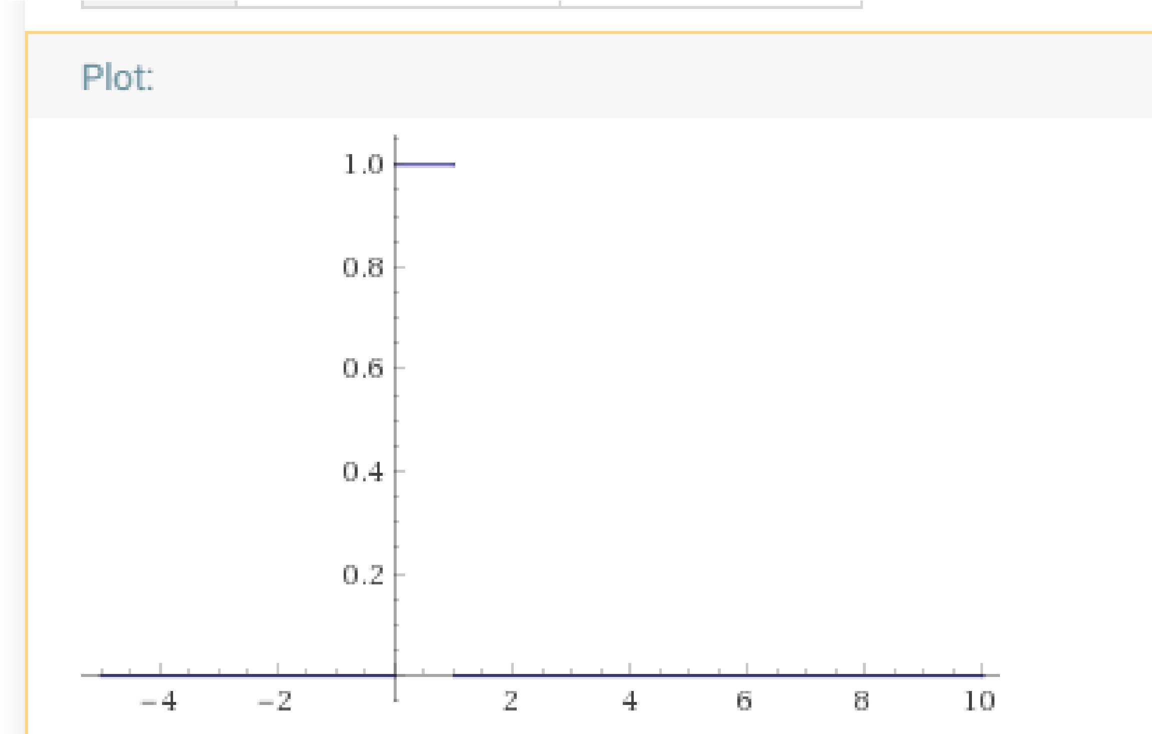

Рис 1. Графік щільності рівномірного на $[0;1]$ *розподілу.*

Для побудови функції розподілу рівномірного на відрізку $[0;1]$ скористаємось командою

Piecewise[{{0, x<0},{x, 0<=x<=1}, {1, x>1}}] from -5 to 10

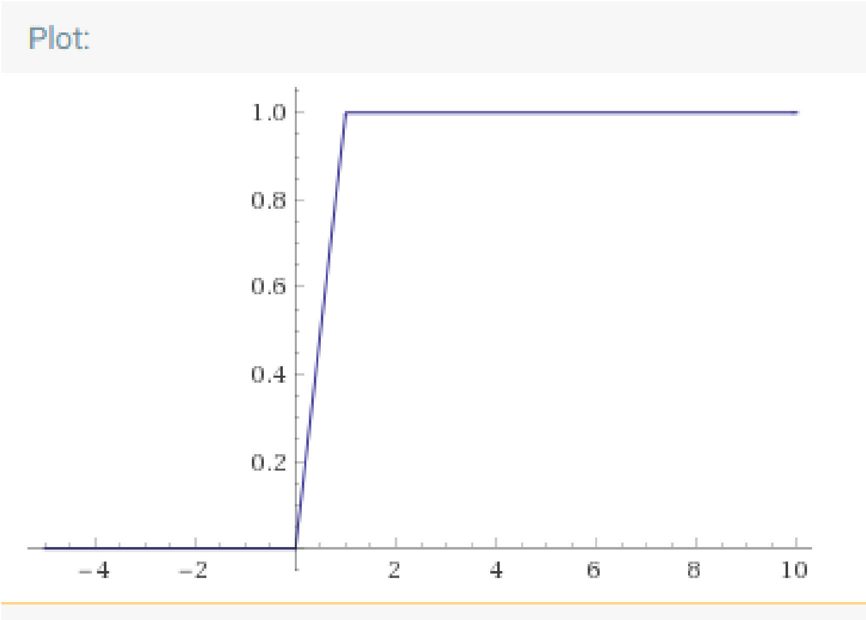

Рис 2. Графік функції розподілу рівномірного на $[0;1]$ *розподілу.*

Проаналізуємо для початку випадок $n=2$. Легко бачити, що випадкова величина

$$\varphi_2 = \frac{\tau_1}{2^1} + \frac{\tau_2}{2^2}$$

має наступний розподіл:

φ_2				
	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$
	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

Зрозуміло, що

$$F_\tau(x) - F_{\varphi_n}(x) = \begin{cases} x - 0{,}25, x \in (0; 0{,}25] \\ x - 0{,}5, x \in (0{,}25; 0{,}5] \\ x - 0{,}75, x \in (0{,}5; 0{,}75 \\ x - 1, x \in (0{,}75; 1]. \end{cases}$$

Зрозуміло, що поза межами відрізка функція рівна нулю. Побудуємо відповідну функцію.

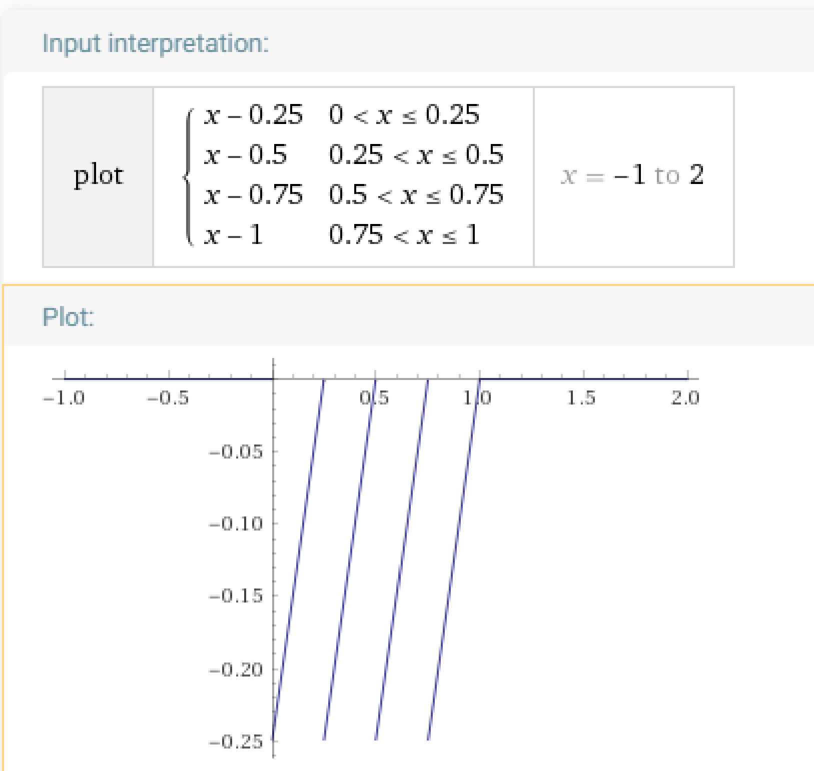

Рис 3. Графік функції $F_\tau(x) - F_{\varphi_n}(x)$

Для цього використовувалась команда

Piecewise[{{x-0.25, 0<x<=0.25},{x-0.5, 0.25<x<=0.5},{x-0.75, 0.5<x<=0.75}, {x-1, 0.75<x<=1}}] from -1 to 2

Таким чином,

$$\Delta_2(\tau) = 0{,}25.$$

Повторюючи відповідну процедуру можливо отримати наступну таблицю відхилень.

Таблиця 1.Значення похибок $\Delta_n(\tau)$ *для рівномірного розподілу.*

n	$\Delta_n(\tau)$
1	0,5
2	0,25
3	0,125
4	0,0625
5	0,03125

По відповідних обрахунках, можливо зробити висновок, що є правильною наступна формула:

$$\Delta_n(\tau) = \frac{1}{2^n}$$

і відповідно

$$\lim_{n\to\infty} \Delta_n(\xi) = 0.$$

Здійснимо для прикладу чотири серії по три підкидання монетою. Гербу поставимо у відповідність одиничку а рішці нуль.

Нехай в процесі підкидання були отримані наступні результати:

$$(0; 1; 0; 1)$$

$$(1; 1; 0; 1)$$

$$(1; 0; 0; 1)$$

$$(0; 0; 0; 1)$$

Результатам відповідних серій можливо поставити у відповідність числа:

$$x_1 = \frac{0}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \frac{0}{2^3} + \frac{1}{2^4} = 0{,}3125;$$

$$x_2 = \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \frac{0}{2^3} + \frac{1}{2^4} = 0{,}8125;$$

$$x_3 = \frac{1}{2^1} + \frac{0}{2^2} + \frac{0}{2^3} + \frac{1}{2^4} = 0{,}5625;$$

$$x_4 = \frac{0}{2^1} + \frac{0}{2^2} + \frac{0}{2^3} + \frac{1}{2^4} = 0{,}0625.$$

Можливо говорити про те, що ми згенерували випадковим чином чотири числа, що підпорядковані рівномірному розподілу з похибкою $\Delta = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8} = 0{,}125 = 12{,}5\%$.

Висновки. Таким чином, маємо що прослідковується достатньо швидка асимптотика збіжності порядку $\frac{1}{2^n}$ часткових сум двійкового випадкового ряду до граничного рівномірного розподілу. Відповідні результати можливо використати в практичному розумінні для генерації рівномірно розподілених чисел.

Список літератури

1. Валтер Я. Стохастические модели в экономике. − М.: Статистика, 1976. − 232 с.
2. Вентцель А. Д. Курс теории случайных процессов. – М.: Наука, 1975. − 320 с.
3. Гнеденко Б.В. Курс теории вероятностей. –М.: Наука, 1988. – 448 с.
4. Колмогоров А.Н. Основные понятия теории вероятностей. – М.: Наука, 1974. –120 с.
5. Розанов Ю. А. Случайные процессы. Краткий курс. – М.: Наука, 1979. − 184 с .