УДК 519.21

ОЦІНКА АСИМПТОТИКИ ЗБІЖНОСТІ В ЗАКОНІ ВЕЛИКИХ ЧИСЕЛ У ФОРМІ ХІНЧИНА З ДИСКРЕТНИМИ БІНОМІАЛЬНИМИ КОМПОНЕНТАМИ

Макарчук Олег, Іванова Яна

Науковий керівник: канд.-ф.-м. наук, доцент Макарчук О.П.

Центральноукраїнський державний педагогічний університет імені Володимира Винниченка, м. Кропивницький, Україна

В статті представлено оцінки асимптотики збіжності в ЗВЧ у формі Хінчина для дискретно розподілених біноміальних випадкових послідовностей. Акцент здійснюється на випадок, коли доданки випадкової послідовності є незалежними в сукупності та набувають значень 0 і 1 з рівними ймовірностями відповідно. Аналіз асимптотики збіжності в законі великих чисел у формі Хінчина здійснюється в контексті класичної Чебишевої оцінки, отриманої на основі ймовірнісної нерівності Маркова-Чебишева, по відношенню до збіжності до граничного розподілу за ймовірністю.

Ключові слова: закон великих чисел, нерівність Чебишева, дискретний розподіл, функція розподілу, розподіл Бернуллі, математичне сподівання.

Assessment of asymptotics of convergence in the law of large numbers in the form of Hinchin with discrete binomial components

O Makarchuk, Y Ivanova

Scientific supervisor: Candidate of Physics and Mathematics Science Makarchuk O.P.

Volodymyr Vynnychenko Ukrainian State Pedagogical University, Kropyvnystky, Ukraine

The paper presents estimates of the asymptotics of convergence in the microwave in the form of Hinchin for discrete distributed binomial random sequences. Emphasis is placed on the case when the terms of a random sequence are independent in the aggregate and acquire values of 0 and 1 with equal probabilities, respectively. The analysis of the asymptotics of convergence *in the law of large numbers in the form of Hinchin is carried out in the context of the classical Chebyshev estimate obtained on the basis of the Markov-Chebyshev probability inequality in relation to the convergence to the probability boundary distribution.*

Keywords: law of large numbers, Chebyshev inequality, discrete distribution, distribution function, Bernoulli distribution, mathematical expectation.

1. Постановка проблеми.

Поява закону великих чисел, викликана природним бажанням, створення аналогів теорем Тепліца та Штольця на множині послідовностей випадкових величин, точніше кажучи добре відомий факт, що середні арифметичні перших n-членів збіжної послідовності, має ту ж саму границю, що і сама послідовність. На сьогоднішній день, проблема знаходження критеріїв, при яких середнє арифметичне перших n-членів випадкової послідовності збігається за ймовірністю до константи повністю не розв'язана.

Навіть в класі задач типу закону великих чисел відповідна проблема, розв'язана на рівня достатніх умов. Одним із перших класичних результатів, у відповідному напрямку, є теореми вітчизняних математиків А.Маркова та П.Чебишева. Одним з можливих поглиблень посиленого закону великих чисел є закон повторного логарифму, який в найпростішому дискретному варіанті був доведений О.Хінчиним та поглиблений А.Колмогоровим на найбільш широкий клас випадкових величин.

Робота присвячена проблемі знаходження оцінок асимптотики збіжності в ЗВЧ у формі Хінчина для дискретно розподілених біноміальних випадкових послідовностей.

Об'єкт дослідження: закон великих чисел у формі Хінчина.

Предмет дослідження: оцінки асимптотики збіжності в ЗВЧ у формі Хінчина для дискретно розподілених біноміальних випадкових послідовностей.

Мета дослідження: оцінити асимптотику збіжності в ЗВЧ у формі Хінчина для симетричного розподілу Бернуллі в контексті класичної Чебишевої оцінки.

Результати дослідження можуть бути використані при уточненні довірчих інтервалів статистичних критерії, породжених дискретними та абсолютно неперервними розподілами.

2. Оцінка асимптотики збіжності в ЗВЧ у формі Хінчина для симетричного розподілу Бернуллі.

Розглянемо випадкову величину, що має стандартний біноміальний (бернулевий) розподіл з параметром 0,5:

$$\xi \in B_{0,5}.$$

У цьому випадку таблиця розподілу має вигляд:

ξ	0	1
	0,5	0,5

Функція розподілу у цьому випадку має вигляд:

$$F_{\xi}(x) = \begin{cases} 0, x \in (-\infty; 0] \\ 0{,}5, \quad x \in (0; 1] \\ 1, x \in (1; +\infty) \end{cases}$$

Зрозуміло, що

$$M_{\xi} = 0 \cdot 0{,}5 + 1 \cdot 0{,}5 = 0{,}5.$$

Для дисперсії маємо:

$$M_{\xi^2} = 0^2 \cdot 0{,}5 + 1^2 \cdot 0{,}5 = 0{,}5.$$

$$M_{\xi} = 0{,}5.$$

звідки відповідно

$$D_{\xi} = M_{\xi^2} - M_{\xi}^2 = 0{,}5 - 0{,}5^2 = 0{,}25.$$

Нагадаємо, що ЗВЧ у формі Хінчина має наступний вигляд:

Якщо $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ – послідовність однаково розподілених незалежних в сукупності випадкових величин, причому $M(|\xi_1|) < +\infty$,то

$$\frac{\xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_n}{n} \xrightarrow{P} M(\xi_1).$$

Використовуючи нерівність Чебишева-Бйенеме:

$$P(|\tau - M(\tau)| \geq t) \leq \frac{D(\tau)}{t^2}$$

можливо отримати ***класичну оцінку Чебишева*** для асимптотики збіжності в ЗВЧ:

$$P(|\frac{\xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_n}{n} - M(\xi_1)| \geq t) \leq \frac{D(\xi_1)}{nt^2}$$

Позначимо функцію:

$$g_n(t) = nt^2 P(|\frac{\xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_n}{n} - M(\xi_1)| \geq t)$$

Розглянемо наступні величини:

$$A(n) = \sup_{t \in R} g_n(t),$$

$$A = \sup_{n \in N} A(n),$$

тоді оцінку Чебишева можливо буде поглибити:

$$P\left(\left|\frac{\xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_n}{n} - M(\xi_1)\right| \geq t\right) \leq \frac{A}{nt^2}, \forall t \in (0; +\infty).$$

Виразимо величину

$$P\left(\left|\frac{\xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_n}{n} - M(\xi_1)\right| \geq t\right)$$

через відповідну функцію розподілу:

$$P\left(\left|\frac{\xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_n}{n} - M(\xi_1)\right| \geq t\right) = P\left(\frac{\xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_n}{n} \geq M(\xi_1) + t\right) +$$

$$P\left(\frac{\xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_n}{n} \leq M(\xi_1) - t\right) = 1 - P\left(\frac{\xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_n}{n} \leq M(\xi_1) + t\right) +$$

$$+P\left(\frac{\xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_n}{n} \leq M(\xi_1) - t\right) = 1 - P(\psi_n \leq nM(\xi_1) + nt) +$$

$$+P(\psi_n \leq nM(\xi_1) - nt) = 1 - F_{\psi_n}(nM(\xi_1) + nt) + F_{\psi_n}(nM(\xi_1) - nt),$$

де

$$\psi_n = \xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_n.$$

Отже,

$$g_n(t) = nt^2 P\left(\left|\frac{\xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_n}{n} - M(\xi_1)\right| \geq t\right) =$$

$$= nt^2\left(1 - F_{\psi_n}(nM(\xi_1) + nt) + F_{\psi_n}(nM(\xi_1) - nt)\right).$$

Тепер безпосередньо перейдемо до аналізу випадку розподілу Бернуллі. Для симетричного стандартного розподілу Бернуллі ЗВЧ з оцінкою Чебишева має вигляд:

$$P\left(\left|\frac{\xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_n}{n} - \frac{1}{2}\right| \geq t\right) \leq \frac{0{,}25}{nt^2}, \forall t \in (0; +\infty).$$

Отож, при $n = 2$, маємо наступну функцію

$$g_2(t) = 2t^2\left(1 - F_{\psi_2}(1 + 2t) + F_{\psi_2}(1 - 2t)\right),$$

де

$$\psi_2 = \xi_1 + \xi_2.$$

Зрозуміло, що

$$\xi_1 + \xi_2 \in B_{2;0,5}$$

Відповідна таблиця розподілу має вигляд:

$\xi_1 + \xi_2$	0	1	2
	0,25	0,5	0,25

Побудуємо спочатку функцію $F_{\xi_1+\xi_2}(x)$.

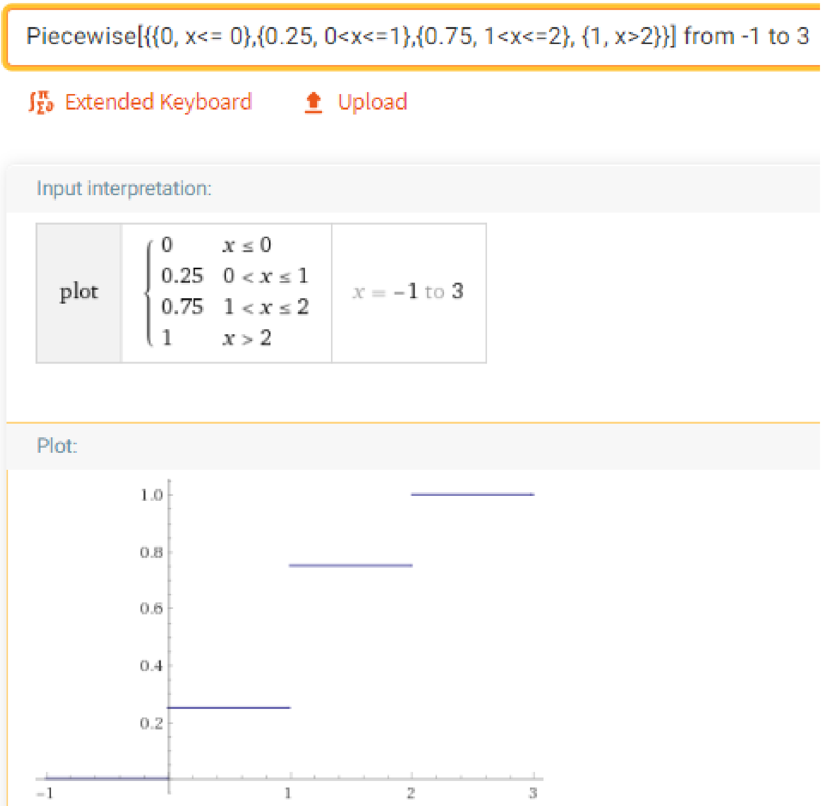

Рис 1. Графік $F_{\xi_1+\xi_2}(x)$.

Для цього використаємо команду

Piecewise[{{0, x<= 0},{0.25, 0<x<=1},{0.75, 1<x<=2}, {1, x>2}}] from -1 to 3

Знайдемо більш простий аналітичний вид для функції:

$$g_2(t) = 2t^2\left(1 - F_{\psi_2}(1+2t) + F_{\psi_2}(1-2t)\right).$$

Врахуємо наступні формули:

$$F_{\xi_1+\xi_2}(1+2t) = \begin{cases} 0{,}75, t \in (0; 0{,}5] \\ 1, t \in (0{,}5; +\infty) \end{cases}$$

$$F_{\xi_1+\xi_2}(1-2t) = \begin{cases} 0{,}25, t \in (0; 0{,}5] \\ 0, t \in (0{,}5; +\infty) \end{cases}$$

В результаті маємо:

$$g_2(t) = \begin{cases} 2t^2(1 - 0{,}75 + 0{,}25), t \in (0; 0{,}5] \\ 2t^2(1 - 1 + 0), t \in (0{,}5; +\infty) \end{cases}$$

В кінцевому рахунку маємо:

$$g_2(t) = \begin{cases} t^2, t \in (0; 0{,}5] \\ 0, t \in (0{,}5; +\infty) \end{cases}$$

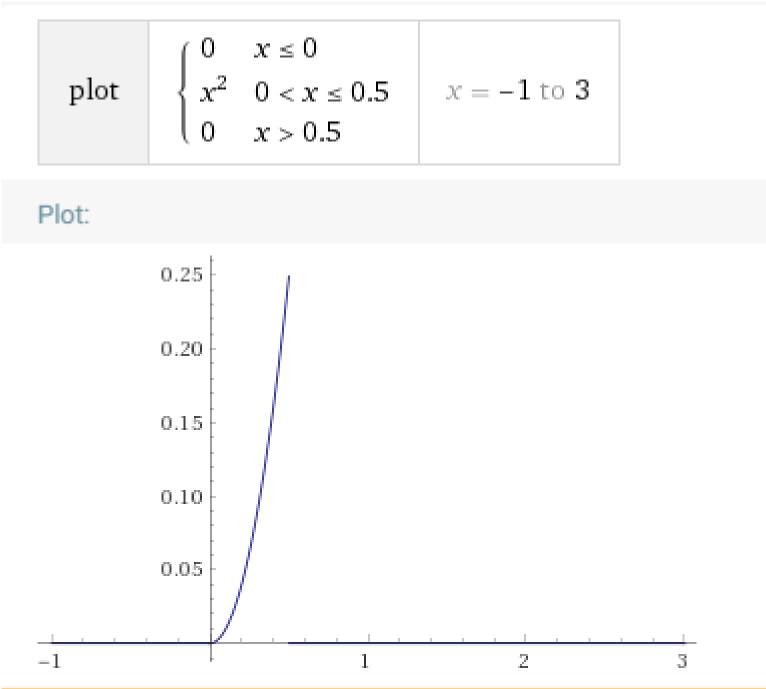

Рис 2. Графік $g_2(t)$.

Для відповідного графіку використовувалась команда:

Piecewise[{{0, x<= 0},{x^2, 0<x<=0.5}, {0, x>0.5}}] from -1 to 3

У даному випадку зрозуміло, що

$$A(2) = \sup_{t \in R} g_2(t) = 0{,}25,$$

тобто покращення оцінки Чебишева не відбувається.

Використовуючи аналогічну методологію до $g_2(t)$ маємо наступні значення $A(n) = sup_R\, g_n(t)$.

Побудуємо наступну таблицю значень похибок.

Таблиця 1. Значення $\sup_R g_n(t)$ для стандартного бернулевого розподілу

n	$A(n) = \sup\limits_{R} g_n(t).$
2	0,25

3	0,2478
4	0,2485
5	0,2489

Висновки. У даному випадку прослідковується чітка асимптотика консолідації значень біля класичної по Чебишеву оцінки $0{,}25$, що дозволяє зробити теоретичний висновок.

Таким чином, для стандартного симетричного розподілу Бернуллі можливо вказати наступну асимптотику збіжності в ЗВЧ у формі Хінчина:

$$P\left(\left|\frac{\xi_1+\xi_2+\cdots+\xi_n}{n}-M(\xi_1)\right|\geq t\right)\leq\frac{A}{nt^2},\forall t\in(0;+\infty).$$

де стала A дорівнює $0{,}25$ і покращена бути не може.

Список літератури

1. Валтер Я. Стохастические модели в экономике. − М.: Статистика, 1976. − 232 с.
2. Вентцель А. Д. Курс теории случайных процессов. – М.: Наука, 1975. − 320 с.
3. Гнеденко Б.В. Курс теории вероятностей. –М.: Наука, 1988. – 448 с.
4. Колмогоров А.Н. Основные понятия теории вероятностей. – М.: Наука, 1974. –120 с.
5. Розанов Ю. А. Случайные процессы. Краткий курс. – М.: Наука, 1979. − 184 с .