УДК 373.5.016:51

ЗАСТОСУВАННЯ НЕРІВНОСТІ КОШІ ПРИ РОЗВЯЗУВАННІ ЗАДАЧ

Литвиненко Надія

Науковий керівник: доктор фізико-математичних наук,

професор Волков Ю.І.

Центральноукраїнський державний педагогічний університет імені

Володимира Винниченка, м. Кропивницький, Україна

У статті обгрунтовано доцільність застосування нерівності Коші при доведенні та розв'язуванні деяких задач, що в більшості випадках допомагає спростити даний процес. Наводяться приклади застосування простої і загальної (вагової) нерівності Коші при вирішенні завдань вищого рівня складності. Дослідження нестандарних прийомів розв'язування рівнянь, показали, що нерівність Коші сприяє раціоналізації знаходження коренів заданого рівняння.

Ключові слова: *нерівність Коші, рівняння, задачі підвищеного рівня шкільного курсу математики, олімпіадні задачі.*

Application of Cauchy inequality in solving problems

N. Lytvynenko

Scientific supervisor: Dr. of Physics and Mathematics Sciences,

Professor Volkov Y.I.

The Volodymyr Vynnychenko Central Ukrainian State Pedagogical University,

Kropyvnytsky, Ukraine

The article substantiates the expediency of using Cauchy inequality in proving and solving some problems, which in most cases helps to simplify this process. Examples of application of simple and general (weight) Cauchy inequality at the decision of problems of the highest level of complexity are resulted. Studies of non-standard methods for solving equations have shown that the Cauchy inequality helps to rationalize finding the roots of a given equation.

Keywords: *Cauchy inequality, equations, problems of the advanced level of school course of mathematics, Olympic problems.*

Постановка проблеми. Нерівності відіграють велику роль в більшості розділів математики, без них не може обійтись ні фізика, ні економіка. З їх допомогою у багатьох випадках можна здійснити дослідження за мінімально витрачений час. Проблема дослідження полягає у відшуканні та систематизації прийомів методів доведення нерівностей. Необхідність розгляду застосування нерівності Коші полягає в тому, що в шкільному курсі алгебри цьому приділяють мало увагу, але ж уміння і навички з доведення нерівностей відіграють велику роль при вивченні інших тем з алгебри і геометрії і дуже часто використовуються при розв’язанні олімпіадних завдань.

Аналіз досліджень і публікацій. Деякі види завдань , де застосовується нерівність Коші були розглянуті в математичному журналі «Квант». У книзі «Вибрані питання математики. 9 клас. Факультативний курс» авторів Боковня О. А., Фірсов В. В., Шварцбурд С. І. зазначено багато цікавих фактів про життя і наукову діяльність Огюстена Коші, викладених і систематизованих у зрозумілій і доступній формі. Деякі види завдань, де застосовується нерівність Коші розглянув Калинін С.І. в посібнику «Метод неравенств решения уравнений» [1] та «Средние величины степенного типа» Неравенства Коши и Ки Фана: учебное пособие по спецкурсу [2]. Приклади застосування нерівності Коші при розв’язуванні завдань детально були зазначені в роботі Вороного О.М. «Кіровоградські олімпіади юних математиків» [3].

Мета статті: підготовка учнів до поглибленого вивчення математики та участі в математичних олімпіадах, дослідження прийомів та методів застосування нерівності Коші при розв’язуванні деяких задач.

Виклад основного матеріалу (результатів) дослідження. Спочатку згадаємо, що головною нерівністю в області дійсних чисел являється нерівність $x^2 \geq 0$, з неї вже йдуть інші, однією з них є відома нерівність Коші.

Нерівність Коші (для двох чисел) стверджує, що середнє арифметичне невід’ємних чисел a і b не менше їх середнього геометричного:

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \tag{1}$$

де $\frac{a+b}{2}$ – середнє арифметичне, а $\sqrt{ab}$ – середнє геометричне. Причому рівність досягається лише за умови, що $a = b$.

Доводиться вона дуже просто. Нехай $a + b \geq 2\sqrt{ab}$

Оскільки $a + b \geq 0$ та $a - b \geq 0$, отже нерівність можна піднести до квадрату:

$$(a + b)^2 \geq 4ab \leftrightarrow a^2 + 2ab + b^2 \geq 4ab \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow a^2 + 2ab + b^2 - 4ab \geq 0 \leftrightarrow a^2 - 2ab + b^2 \leftrightarrow (a - b)^2 \geq 0$$

Таким чином ми довели, що нерівність дісна при будь-яких a і b.

У повному варіанті в нерівність Коші також включаються середнє гармонійне і середнє квадратичне.

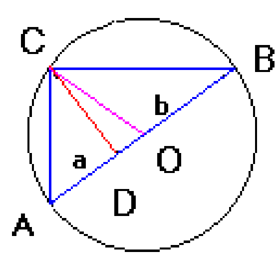
$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} \tag{2}$$

де $a_1 \geq 0;\ a_2 \geq 0; \dots a_n \geq 0$

Нерівність Коші також часто застосовується в геометрії. Виникнення чисел обумовлене потребами практичної діяльності людини. Застосування чисел вимагало вміння їх порівнювати. Суто геометрично було обгрунтовано нерівність (1.1), де a і b розглядали як довжини відрізків.

Розглянемо геометричне доведення нерівності Коші.

Нехай дано прямокутний трикутник *ABC*, де *CD* – висота проведена з прямого кута трикутника, *CO* – радіус описаного кола (мал. 1)



Мал. 1

Позначимо *AD=a*, *BD=b*, *CD=h*, *CO=r*. оскільки в прямокутному трикутнику $h^2 = ab$, то $h = \sqrt{ab}$. Так як r – радіус описаного кола, то за властивістю прямокутного трикутника маємо $r = \frac{a+b}{2}$.

Зрозуміло, що $r \geq h$, при чому рівні ці відрізки лише, якщо трикутник *ABC* – рівнобедрений. Таким чином нерівність (1.1) доведена.

З цієї нерівності слідують важливі наслідки:

1. $a + b \geq 2\sqrt{ab}$
2. $a^2 + b^2 \geq 2ab$
3. $ab \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$
4. $ab \leq \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$

Рівність досягається лише при $a = b$. Нерівності вірні лише за умови $a > 0, b > 0$.

Найбільш ефективним методом доведення нерівностей є застосування раніше доведеної нерівності. Якщо за допомогою деякої нерівності можна довести цілу низку інших більш складних нерівностей, то така нерівність називається ключовою. Так, нерівність Коші є однією з них.

Без доведення нерівностей не проходять олімпіади з математики, гуртки, змагання і факультативи. Тому далі розглянемо приклади застосування нерівності Коші на завданнях математичних олімпіад різних рівнів:

Приклад 1. Дано додатні числа a і b, які задовольняють умову
$ab > 2002a + 2003b$. Доведіть, що при цьому виконується нерівність
$a + b > \left(\sqrt{2002} + \sqrt{2003}\right)^2$.

(XLIII Всеукраїнська олімпіада юних математиків, IV етап, 9-й клас, 2003 р.)

Розв'язання: З умови маємо дві нерівності:

$$a > 2002 + 2003\frac{b}{a};\ b > 2002\frac{a}{b} + 2003$$

Додамо ці нерівності і використаєм нерівність Коші :

$$a + b > 2002 + \left(2003\frac{b}{a} + 2002\frac{a}{b}\right)2003 \geq 2002 + 2\sqrt{2003\frac{b}{a} * 2002\frac{a}{b}} + 2003$$

$$= 2002 + 2\sqrt{2002 * 2003} + 2003 = \left(\sqrt{2002} + \sqrt{2003}\right)^2. \blacksquare$$

Розглянемо випадок переходу від середнього геометричного до середнього арифметичного.

Приклад 2. Розв’яжіть рівняння:

$\sqrt{2x - x^2} + \sqrt{3x^2 + 2x - 1} + \sqrt{5x^2 - 4x} = 5x - 1.$

Розв’язання: Знайдемо область значення рівняння, для цього сформуємо систему нерівностей:

$$\begin{cases} 2x - x^2 \geq 0 \\ 3x^2 + 2x - 1 \geq 0 \\ 5x^2 - 4x \geq 0 \\ 5x - 1 \geq 0. \end{cases}$$

Множиною рішень даної системи є проміжок $x \in \left[\frac{4}{5}; 2\right]$.

Розкладемо вираз під знаком кожного кореня на множники. Можна показати, що на області визначення рівняння всі співмножники будуть тільки додатніми. Тоді до кожного кореня можна застосувати нерівність Коші. Звідси маємо:

$$\sqrt{(2 - x)x} + \sqrt{(3x - 1)(x + 1)} + \sqrt{(5x - 4)x}$$

$$\leq \frac{2 - x + x}{2} + \frac{3x - 1 + x + x}{2} + \frac{5x - 4 + x}{2} = 5x - 1.$$

Після перетворення права частина нерівності збігається з правою частиною заданого рівняння. Рівність можлива лише за умови:

$$\begin{cases} x = 2 - x \\ x - 1 = x + 1 \\ 5x - 4 = x \end{cases}$$

Дана система має єдине розв’язок $x = 1$. Знайдене значення належить області значення даного рівняння, отже і є його розв’язкм.

Далі розглянемо випадок нерівності, яку можна довести двома способами: проста нерівність Коші (3.1) і загальна (вагова) нерівність Коші (3.2).

Приклад 3. Доведіть нерівність:

$$a^{10} + \frac{3}{a^2} + \frac{4}{a} \geq 8, a > 0$$

Доведення (3.1). Використаємо просту нерівність Коші:

$$a^{10} + \frac{3}{a^2} + \frac{4}{a} = \left(a^{10} + \frac{1}{a^2}\right) + \frac{2}{a^2} + \frac{4}{a} = 2\left(a^4 + \frac{1}{a^2}\right) + \frac{4}{a} \geq$$

$$\geq 4\sqrt{a^2} + \frac{4}{a} = 4\left(a + \frac{1}{a}\right) \geq 8 \blacksquare$$

Доведення (3.2).

$$a^{10} + 3a^{-2} + 4a^{-1} \geq 8(a^{10}a^{-6}a^{-4})^{\frac{1}{8}} = 8 \blacksquare$$

В даному випадку застосовується вагова нерівність Коші до величин a^{10}, a^{-2}, a^{-1} з вагами 1, 3, 4. Бачимо, що цей спосіб вирішення даної нерівності значно швидший.

Приклад 4. Довести нерівність $1 * 2^2 * 3^3 * \dots * n^n < \left(\frac{2n+1}{3}\right)^{\frac{n(n+1)}{2}}, n \in N$

Доведення. За вагової нерівністю Коші запишемо:

$$(1 * 2^2 * 3^3 * \dots * n^n)^{\frac{1}{1+2+\cdots+n}} < \frac{1 * 1 + 2 * 2 + \cdots n + n}{1 + 2 + \cdots + n} = \frac{\frac{n}{6}(n+1)(2n+1)}{\frac{n(n+1)}{2}}$$

$$= \frac{2n+1}{3} \blacksquare$$

У даній нерівності знак нерівності строгий, так як 1, 2, …, n є різними. Звідси слідує доведена нерівність.

Приклад 5. (Кіровоградська обласна олімпіада юних математиків, 2002-2003 р., 11-й кл.)

Нехай *a, b, c* – довжини сторін трикутника, а *S* – його площа. Довести, що

$$S \leq \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4\sqrt{3}}.$$

Доведення. З формули Герона маємо рівність

$$\frac{S^2}{p} = (p-a)(p-b)(p-c).$$

За нерівністю Коші для трьох параметрів маємо:

$$(p-a)(p-b)(p-c) \le \left(\frac{(p-a)+(p-b)+(p-c)}{3}\right)^3,$$

то

$$\frac{S^2}{p} \le \frac{p^3}{27} \to S \le \frac{(a+b+c)^2}{12\sqrt{3}}.$$

Враховуючи, що

$(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca \le a^2+b^2+c^2+ (a^2+b^2)+(b^2+c^2)+(a^2+c^2) = 3(a^2+b^2+c^2).$

З останньої нерівності випливає:

$$S \le \frac{a^2+b^2+c^2}{4\sqrt{3}}. \blacksquare$$

Приклад 6. Знайти найбільше і найменше значення функції

$$\arcsin^3 x + \arccos^3 x$$

Розв'язання: Нехай $\arcsin x = \alpha$, $\arccos x = \beta$. Оскільки $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$, то

$$\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha+\beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha+\beta) = \frac{\pi^3}{8} - \frac{3\pi}{2}\alpha\beta = y$$

Значення функції буде найменшим, коли найбільшим буде значення добутку $\alpha\beta$. Оскільки $\beta \ge 0$, то найбільше значення $\alpha\beta$ потрібно шукати при $\alpha > 0$.

Із нерівності Коші маємо

$$\alpha\beta \le \left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2$$

але

$$\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2 = \frac{\pi^2}{16}$$

тому

$$\alpha\beta \leq \frac{\pi^2}{16}$$

Найбільше значення $\alpha\beta$ прийматиме при $\alpha = \beta = \frac{\pi}{4}$. Тоді $\arcsin x = \frac{\pi}{4}$; $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ і найменше значення функції буде:

$$y_{min} = \frac{\pi^3}{8} - \frac{3\pi}{2}\alpha\beta = \frac{\pi^3}{8} - \frac{3\pi}{2}\alpha\beta * \frac{\pi}{4} * \frac{\pi}{4} = \frac{\pi^3}{32}$$

Найменше значення $\alpha\beta$ очевидно буде при $\alpha < 0$. При $x = -1$ маємо $\alpha = -\frac{\pi}{2}$, $\beta = \pi$. Враховуючи ці значення, бачимо, що добуток буде мінімальним, оскільки α приймає мінімальне значення, а β – максимальне.

Отже при $x = -1$ функція приймає найбільше значення

$$y_{max} = \frac{\pi^3}{8} - \frac{3\pi}{2}\pi * \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{7\pi^3}{8}$$

Таким чином, найбільшим значенням буде $\frac{7\pi^3}{8}$, а найменшим $\frac{\pi^3}{32}$.

Висновки та перспективи подальших пошуків у напрямі дослідження. В статті було розглянуто застосування нерівності Коші при розв'язуванні завдань, які вивчаються учнями на математичних гуртках, факультативах та застосовуються при розв'язуванні завдань різного рівня складності. Так як дуже часто на олімпіадах з математики учням даються завдання, які можливо вирішити швидше і легше за допомогою класичної нерівності. В зазначених прикладах ми побачили доцільність використання нерівності Коші для вирішення задач, в статті використані найбільш ефективні прийоми та методи доведення деяких нерівностей, що пропонуються на різноманітних конкурсах та олімпіадах з математики різних рівнів.

Список використаної літератури:

1. Калинин. С.И. Метод неравенств решения уравнений. Учебное пособие по элективному курсу для классов физико-математического профиля./ С. И. Калинин. – М.: Изд-во «Московский лицей», 2013 – 112.

2. Калинин С. И. Средние величины степенного типа. Неравенства Коши и Ки Фана: учебное пособие по спецкурсу. – Киров: Изд-во ВГГУ, 2002. – 368 с.
3. Воронний О.М. Кіровоградські олімпіади юних математиків (1991-2000 рр.). – Кіровоград: РВЦ КДПУ ім. В. Винниченка, 2000. – 140 с.