УДК 372.851

ВИВЧЕННЯ ДЕЯКИХ СПОСОБІВ ДОВЕДЕННЯ НЕРІВНОСТЕЙ В ШКІЛЬНОМУ КУРСІ МАТЕМАТИКИ

Соколенко Карина

Науковий керівник: доктор педагогічних наук, професор Кушнір В.А.

Центральноукраїнський державний педагогічний університет імені Володимира Винниченка, м. Кропивницький, Україна

У статті розглядається методика вивчення змістової лінії «нерівності» в шкільному курсі математики. Основна увага приділяється нерівностям, котрі носять творчий характер і розв'язання яких розширить і поглибить знання учнів з таких тем як «Лінійні та квадратні нерівності» та «Нерівності з модулем». В статті містяться приклади таких нерівностей.

Ключові слова: *нерівність, доведення нерівності, лінійна нерівність, квадратна нерівність, модуль.*

Study some ways to prove inequalities in a school math course

K. Sokolenko

Scientific supervisor: doctor of pedagogical sciences, professor doctor of pedagogical sciences, professor Kushnir V.A.

The Volodymyr Vynnychenko Central Ukrainian State Pedagogical University, Kropyvnytskyi, Ukraine

The article considers the method of studying the semantic line of "inequality" in the school course of mathematics. Emphasis is placed on inequalities that are creative and the solution of which will expand and deepen students' knowledge of topics such as "Linear and square inequalities" and "Inequalities with a module". The article contains examples of such inequalities.

Keywords: *inequality, proof of inequality, linear inequality, quadratic inequality, modulus.*

Постановка проблеми. Змістова лінія рівнянь та нерівностей займає значне місце в шкільному курсі математики. З поняттям рівняння учні ознайомлюються вже в початковій школі, і вже в кожному класі вивченню цих понять приділяється значна кількість годин.

Якщо поняття рівняння зустрічається вже у 5 класі, то поняття нерівності виникає у 8 класі при поглибленому вивченні математики чи у 9 класі за програмою стандарт. До цього учні лише оперували поняттями «більший-менший», «важчий-легший» тощо.

Поняттю «нерівність» в шкільному курсі математики належить вагома роль, основні типи задач на нерівності є

- Вивчення основних методів розв'язування нерівностей різних типів.
- Вивчення основних методів доведення нерівностей за певних умов.

Крім задач практичного характеру в шкільному курсі математики наявні задачі творчого змісту, що зустрічаються у олімпіадному русі. Задачі на доведення нерівностей крім практичного значення також часто мають теоретичне значення для багатьох розділів математики.

Якщо задачам на розв'язування нерівностей основних типів в програмі приділяється значна кількість часу, а також ці типи задач з високою ймовірністю можуть зустрітися учні на ЗНО, то в той же час задачі на доведення нерівностей зустрічаються лише на олімпіадах і вони мало зрозумілі для більшості учнів. Відповідно вчитель має менше можливостей приділяти увагу доведенню нерівностей, в той же час для успішної участі учнів в олімпіадному русі необхідні методичні розробки, в яких містяться основні типи доведення нерівностей та певна їх кількість для самостійного розв'язання. Саме в цьому полягає актуальність обраної теми дослідження.

Аналіз досліджень і публікацій. Системний підхід в організації діяльності спрямованої на розв'язування творчих, олімпіадних задач вивчалася в роботах Ясінського В.А., Радченка В.М., Рубльова Б.В., Мітельмана І.М., Тихомирова В.М., Коровкіна П.П., Швеця В.О., Працьовитого М.В., Вороного О.М., Федака І.В., Бродського Я.С, Сарани О.О., Плахотника В.В., Ріжняка Р.Я., Ізюмченко Л.В., Сліпенка О.К., Добосевича М.С., Лейфури В.М., К.І. Нешкова, Комова М.П., Солтан Г.Н.,Паюл М.В., І.М. Степури І.М. та інших (Див., наприклад, [1 – 3]). Зокрема, Нешкова К.І. дослідив принципи відбору змісту та обсягу необхідного навчального матеріалу, а також досліджено роль тренувальних вправ. Роботи Коровкіна П.П., Ясінського В.А., Швеця В.О., Сарани О.О., Комова М.П., Лейфури В.М., Солтан Г.Н. присвячені доведенню і розв’язуванню нерівностей.

Метою статті: дослідження особливостей вивчення лінії «нерівності» в шкільному курсі математики, деяким важливим елементарним нерівностям та способам їх доведення.

Виклад основного матеріалу (результатів) дослідження. Можна навести такі основні напрямки розгортання лінії нерівностей в ШКМ [4].

а) Прикладна спрямованість лінії нерівностей розкривається при розв'язанні текстових задач, вивченні можливостей використання алгебраїчного методу та можливостей використання методів математичного моделювання.

б) Теоретико-математична спрямованість лінії нерівностей полягає у дослідженні та вивченні деяких важливих типів нерівностей та їх систем, засвоєнні та опрацюванні відповідних понять і методів.

в) Рівняння та нерівності тісно пов’язані із іншими розділами математики.

г) Дуже часто нерівності зустрічають серед завдань математичних олімпіад та конкурсів.

В залежності від програми навчання – поглиблений рівень чи рівень стандарту – вже у 8 класі (поглиблений рівень) чи у 9 класі (стандарт) учні ознайомлюються із поняттям нерівності та її основними властивостями, також вони вчаться розв’язувати лінійні нерівності та їх системи. Саме тут учні вперше ознайомлюються із поняттям довести нерівність. Основна увага акцентована в темі «Числові нерівності та їх властивості», які є базою для:

- доведення нерівностей;
- розв’язання нерівностей з однією змінною;
- обґрунтування двох методів наближених обчислень: методу меж і практичних методів;
- подвійні нерівності;
- нерівності з модулем;
- практичні задачі на нерівності, оцінювання різних величин;
- квадратичні нерівності [5].

В 10-11 класах учні знайомляться із нерівностями вищих степенів, дробово-раціональними, ірраціональними, тригонометричними, показниковими та логарифмічними нерівностями і їх системами, а також основними способами їх розв’язання. Вивчивши поняття похідної функції та її властивості учні ознайомлюються із можливостями диференціального числення при розв’язуванні та доведенні деяких типів нерівностей, зокрема з використанням теорем Ферма, Лагранжа тощо. На профільному та поглибленому рівнях додатково вивчають властивості опуклих функцій і знайомляться із нерівністю Ієнсена. Вивчивши визначений інтеграл та його властивості учні знайомляться із способом доведення нерівностей із використанням теорем про середнє.

Розглянемо приклади, які розширюють і поглиблюють знання учнів з теми «Лінійні нерівності». Дані задачі можна запропонувати учням при підготовці до математичних олімпіад.

Приклад 1. Знайти найбільшу із величин $\frac{y}{\pi}$ та $\frac{10y}{31}$, якщо виконуються умови $2(x-2)-3(4x-1)=9(1-x)$ та $y<x+9$.

Ясно, що для розв’язання даного прикладу нам слід спочатку розв’язати рівняння $2(x-2)-3(4x-1)=9(1-x)$, коренем якого є число $x=-10$. Тому тепер можна перейти до нерівності $y<x+9 \Rightarrow y<-1.$ Тепер легко обрати більше з двох чисел $-\frac{1}{\pi}$ та $-\frac{10}{31}$.

Розв’язання прикладів наступного типу дасть змогу краще засвоїти властивості нерівностей і застосовувати їх при розв’язанні та доведенні нерівностей.

Приклад 2. Знайти, скільки з перелічених нижче нерівностей правильні: $\frac{a}{c}<0; ac^2<0; a^2c<0; c^3a<0; a^3c<0,$ якщо виконується умова $ac<0.$

Ясно, що невірними будуть наступні $ac^2<0$ та $a^2c<0$.

Приклад 3. Знайти область значення x, якщо для $a,b \in \mathbb{R}$ виконуються наступні відношення

$$a=\frac{x+3}{4}, b=\frac{2x+1}{4}, b<\frac{7}{3}<2a.$$

Із нерівностей $b<\frac{7}{3}<2a$ слідують наступні співвідношення

$$\frac{2x+1}{3}<\frac{7}{3}<\frac{x+3}{2}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x+1<7 \text{ та } 14<3x+9\Leftrightarrow \frac{5}{3}<x<3.$$

Приклад 4. Знайти область можливих значень $\frac{c}{a}$, якщо при $a>b>c$ виконується рівність $a+b+c=0.$

З умови видно, що $a>0,$ тому будемо мати наступні нерівності

$$1+\frac{b}{a}+\frac{c}{a}=0 \text{ та } 1>\frac{b}{a}>\frac{c}{a},$$

тоді виходячи з останньої нерівності отримаємо

$$1>\frac{b}{a}=-1-\frac{c}{a}>\frac{c}{a}\Leftrightarrow 2>-\frac{c}{a} \text{ та } -1-\frac{c}{a}>\frac{c}{a}$$

Отже, $-2<\frac{c}{a}<-\frac{1}{2}.$

Приклад 5. Знайти множину розв’язків нерівності $(a-4b)x+2a-3b>0,$ якщо розв’язком нерівності $(2a-b)x+3a-4b<0$ є множина $x>\frac{4}{9}.$

З того, що півінтервал $x>\frac{4}{9}$ є розв’язком нерівності $(2a-b)x+3a-4b<0$ слідують наступні співвідношення $2a-b<0$ та $\frac{4b-3a}{2a-b}=\frac{4}{9}$

$$\Leftrightarrow 2a<b \text{ та } 36b-27a=8a-4b\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow b=\frac{7}{8}a>2a\Rightarrow a<0.$$

Тоді, нерівність $(a-4b)x+2a-3b>0,$ рівносильна наступній нерівності

$$(a-\frac{7}{2}a)x+2a-\frac{21}{8}a>0\Leftrightarrow -\frac{5}{2}ax>\frac{5}{8}a\Rightarrow x>-\frac{1}{4}.$$

При вивченні квадратних нерівностей корисним будуть наступні приклади.

Приклад 6. Довести, що для всіх $a,b\in\mathbb{R}$ виконується наступна нерівність

$$a^2+ab+b^2\ge 0.$$

Наведемо два доведення.

А) Розглянемо вираз в лівій частині як квадратний тричлен відносно a. Тоді дискримінант $D=-3b^2\le 0\quad \forall b\in\mathbb{R}$, коефіцієнт при a^2 додатний, звідси слідує, за теорією квадратних функцій вихідна нерівність виконується.

Б) Якщо одночасно $a\ge 0, b\ge 0$ або $a\le 0, b\le 0,$ тобто $ab\ge 0,$ то нерівність очевидна. Нехай $ab\le 0,$ наприклад, $a\le 0, b>0,$ тоді з (1) отримаємо (враховуючи нерівність $(-a)b\ge 0$)

$$a^2+b^2=(-a)^2+b^2\ge 2(-a)b\ge(-a)b\Rightarrow a^2+ab+b^2\ge 0.$$

Приклад 7. Довести, що для всіх $x, y\in\mathbb{R}$ виконується нерівність

$$x^2+xy+y^2\ge 3(x+y-1).$$

Перетворимо дану нерівність наступним чином:

$$(x^2-2x+1)+(y^2-2y+1)+xy-x-y+1\ge 0,$$

$$(x-1)^2+(y-1)^2+(x-1)(y-1)\ge 0.$$

Остання нерівність є очевидною, якщо ввести значення $a=x-1, b=y-1$ і скористатись попереднім прикладом.

Можна навести інше доведення, розглянемо ліву частину нерівності

$$x^2+xy+y^2-3(x+y-1)\ge 0$$

Як квадратний тричлен відносно x:

$$x^2+x(y-3)+y^2-3y+3\ge 0.$$

В цьому випадку дискримінант

$$D=y^2-6y+9-4y^2+12y-12=$$

$$=-3y^2+6y-3=-3(y-1)^2\le 0\forall\mathbb{R}.$$

Так, як коефіцієнт при x^2 додатній, то доведення нерівності виконано.

Приклад 8. Довести, що якщо $a+b\ge 1,$ то $a^4+b^4\ge 1/8.$

Додаємо ліві та праві частини правильних нерівностей

$$(a+b)^2\ge 1,$$

$$a^2-2ab+b^2\ge 0,$$

отримаємо

$$2a^2+2b^2 \ge 1 \Leftrightarrow a^2+b^2 \ge 1/2.$$

Маємо дві правильні нерівності

$$(a^2+b^2)^2 \ge 1/4,$$

$$a^4-2a^2b^2+b^4 \ge 0.$$

В результаті отримаємо

$$a^4+b^4 \ge 1/8.$$

Приклад 9. Довести, що мінімальне значення максимальної із трьох величин a,b,c дорівнює 4. Якщо для $a,b,c \in \mathbb{R}$ виконується рівність

$$a+b+c=2 \text{ і } abc=4.$$

Без втрати загальності можна вважати, що

$$a \ge b \ge c.$$

Отже, $a>0$ і

$$b+c=2-a, \ bc=\frac{4}{a}.$$

Згідно теоремі Вієта, b і c є розв’язками квадратного рівняння

$$x^2-(2-a)x+\frac{4}{a}=0.$$

$$D=(2-a)^2-\frac{16}{a} \ge 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a^3-4a^2+4a-16 \ge 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (a-4)(a^2+4) \ge 0 \Leftrightarrow a-4 \ge 0 \Leftrightarrow a \ge 4.$$

Видно, що при $a=4, b=c=-1$ умова задачі виконується, тому, мінімальне значення максимальної із трьох величин a,b,c дорівнює 4.

Досить важливою вправою для учнів буде доведення однієї з найбільш головної нерівності, мабуть, і в усьому курсі математики – нерівність трикутника.

Приклад 10. Довести нерівність трикутника, тобто, що для двох довільних чисел a та b має місце нерівність

$$|a+b| \le |a|+|b|,$$

причому рівність можлива тоді і лише тоді, коли $ab \ge 0$.

Для доведення слід помітити, що обидві частини нерівності є невід'ємними, а тому можемо піднести нерівність до квадрату і отримати рівносильну нерівність. Розглянемо її:

$$|a+b|^2=(a+b)^2=a^2+2ab+b^2\le a^2+2|a||b|+b^2=$$

$$=a^2+2|a||b|+b^2=|a|^2+2|a||b|+|b|^2=(|a|+|b|)^2.$$

Ясно, що умова $ab\ge 0$ гарантує справедливість рівності $ab=|ab|$ і тоді б ми мали в нерівності трикутника знак рівності.

Приклад 11. Довести нерівність трикутника, що для двох довільних чисел a та b має місце нерівність

$$||a|-|b||\le|a-b|$$

причому рівність можлива тоді і лише тоді, коли $ab\ge 0$.

Для доведення слід записати наступні співвідношення $|a|=|a-b+b|\le|a-b|+|b|$, звідки легко отримати $|a|-|b|\le|a-b|$ або $-|a-b|\le|b|-|a|$ та аналогічно отримаємо

$$|b|=|b-a+a|\le|b-a|+|a|\Leftrightarrow|b|-|a|\le|b-a|.$$

Тепер склавши докупи дві останні рівності отримаємо

$$-|a-b|\le|b|-|a|\le|b-a|,\text{ або що те саме } ||a|-|b||\le|a-b|.$$

Приклад 12. Якщо для двох дійсних чисел a та b виконується нерівність

$$||a|-(a+b)|<|a-|a-b||,$$

то є справедливими наступні співвідношення $a<0$ та $b>0$.

В силу невід'ємності обох частин нерівності

$$||a|-(a+b)|<|a-|a-b||$$

можемо записати

$$\left(|a|-(a+b)|\right)^2<\left(a-|a-b|\right)^2,$$

$$a^2-2|a|(a+b)+(a+b)^2<a^2-2a|a+b|+(a+b)^2,$$

$$a|a+b|<|a|\left(a+b\right).$$

З останніх співвідношень слідує, що $a\ne 0$ та $a+b\ne 0$, тому останню нерівність запишемо в наступному виді

$$\frac{a}{|a|} < \frac{a+b}{|a+b|}.$$

Оскільки модулі обох частин останньої нерівності рівний одиниці, то нерівність можлива лише у випадку коли $a<0$ та $a+b>0 \Rightarrow b>0$. Доведено.

Приклад 13. Довести, що для довільних дійсних чисел a,b,c має місце нерівність

$$|a|+|b|+|c|-|a+b|-|a+c|-|b+c|+|a+b+c| \geq 0\,?$$

Розглянемо спочатку випадок, коли одне з чисел рівне 0, нехай $c=0$

$$|a|+|b|+|0|-|a+b|-|a+0|-|b+0|+|a+b+0|=$$

$$|a|+|b|-|a+b|-|a|-|b|+|a+b|=0.$$

Тобто в цьому випадку маємо справедливу нерівність.

В силу симетричності нерівності можемо без втрати загальності, що $|a| \geq |b| \geq |c|$, розділимо початкову нерівність на $|a|$ і отримаємо рівносильну нерівність

$$1+\left|\frac{b}{a}\right|+\left|\frac{c}{a}\right|-\left|1+\frac{b}{a}\right|-\left|\frac{c}{a}+\frac{b}{a}\right|-\left|1+\frac{c}{a}\right|+\left|1+\frac{b}{a}+\frac{c}{a}\right| \geq 0\,.$$

В силу впорядкованості набору чисел $|a| \geq |b| \geq |c|$ легко отримати

$$\left|1+\frac{b}{a}\right| = 1+\frac{b}{a},\ \left|1+\frac{c}{a}\right| = 1+\frac{c}{a}$$

Тому легко отримати наступну нерівність

$$1+\left|\frac{b}{a}\right|+\left|\frac{c}{a}\right|-1-\frac{b}{a}-\left|\frac{c}{a}+\frac{b}{a}\right|-1-\frac{c}{a}+\left|1+\frac{b}{a}+\frac{c}{a}\right| \geq 0$$

або

$$\left(\left|\frac{b}{a}\right|+\left|\frac{c}{a}\right|-\left|\frac{c}{a}+\frac{b}{a}\right|\right)+\left(\left|1+\frac{b}{a}+\frac{c}{a}\right|-1-\frac{b}{a}-\frac{c}{a}\right) \geq 0,$$

але легко побачити в останній нерівності в кожній із дужок нерівність трикутника або властивості модуля, а значить остання нерівність є правильною, а це в свою чергу доводить справедливість нашої нерівності.

Висновки та перспективи подальших пошуків у напрямі дослідження. В статті розглянуто особливості вивчення лінії «нерівності» в шкільному курсі математики, а також деякі важливі елементарні нерівності разом з їх доведенням.

Використання результатів дослідження може стати в нагоді вчителю чи учню на уроці математики чи при підготовці до олімпіад.

Список використаної літератури:

1. Ясінський В.А. Задачі математичних олімпіад та методи їх розв’язування. – Тернопіль: Навчальна книга – Богдан, 2008. – 208 с.
2. Математичні олімпіади школярів України: 2001–2006 рік / В.М. Лейфура, І.М. Мітельман, В.М. Радченко, В.А. Ясінський. – Львів: Каменяр, 2008. – 348 с.
3. Сарана О.О. Математичні олімпіади: просте і складне поруч: Навч. посібн. – Тернопіль: Навчальна книга - Богдан, 2011. – 400 с.
4. Слєпкань З.І. Методика навчання математики: Підруч. для студентів матем. спеціальностей пед. вузів. – К., 2000. - 512с.
5. Мерзляк А. Г. Алгебра: підруч. для 9 кл. / А.Г. Мерзляк, Д.А. Номіровський, В.Б. Полонський, М. С. Якір. – Х.: Гімназія, 2017. –272 с.
6. Кушнір В.А., Ріжняк Р.Я. Інноваційні методи навчання математики // Навчально-методичний посібник. – Кіровоград: РВВ КДПУ ім. В. Винниченка, 2008. – 148 с.