УДК 371.512

ГЕОМЕТРИЧНА ПРОГРЕСІЯ У ПЛАНІМЕТРІЇ ТА СТЕРЕОМЕТРІЇ

Левицький Ярослав

Науковий керівник: доктор іст. наук, професор Ріжняк Р.Я.

Центральноукраїнський державний педагогічний університет імені Володимира Винниченка, м. Кропивницький, Україна

У статті розглядаються приклади зі шкільного курсу геометрії, при розв'язанні яких використовується геометрична прогресія. Наведено найбільш вдалі підходи до розв'язання подібних завдань.

Ключові слова: *послідовність, прогресія, периметр, площа, об'єм, трикутник, квадрат, куб, сума.*

Geometric progression in planimetry and stereometry

Ya. Levickiy

Scientific supervisor: Doctor of Historical Sciences, Professor Rizhniak R. Ya.

The Volodymyr Vynnychenko Central Ukrainian State Pedagogical University, Kropyvnytsky, Ukraine

The article discusses examples from the school course of geometry, in the solution of which geometric progression is used. The most successful approaches to solving such problems are given.

Keywords: *sequence, progression, perimeter, area, volume, triangle, square, cube, sum.*

Постановка проблеми. Існує надзвичайно багато завдань з геометрії (планіметрія, стереометрія), де учням необхідно знаходити: невідому сторону трикутника, чи невідомий кут (n-кутника), площу трикутника (n-кутника, невідомі лінійні елементи (n-кутника), об'єм многогранника і т.д. Усі школярі до цього звикли. Але шкільна геометрія не може оминути й такі приклади, де можна зустріти геометричну прогресію, як спосіб розв'язання задачі. Такі задачі, як правило, викликають в учнів питання, пов'язані з їх розв'язанням (задач). Діти погано важко розуміють поставлену перед ними задачу, часто плутаючи основні поняття. Тому є вкрай необхідним виклад матеріалу, який допоможе учням розв'язати даний типаж завдань.

Аналіз досліджень і публікацій. Зазвичай, такі задачі можна зустріти в будь-якому підручнику 9-го класу «Алгебра» за оновленою програмою, можна зустріти й в інших підручниках [3], [4]. В підручниках «Геометрія» їх майже немає, за винятком 11-х класів, де у куб вписують куб і т.д. Методичні особливості організації розв'язування таких задач були предметом розгляду методистів-науковців – З.І. Слєпкань, Г.П. Бевз, О.С. Дубинчук. Найбільш цікаві та сучасні підходи до організації розв'язання таких задач можна знайти у В.А. Кушніра та Р.Я. Ріжняка [1], [2], [5–7].

Мета статті: аналіз формування навичок розв'язування геометричних задач, де зустрічається геометрична прогресія.

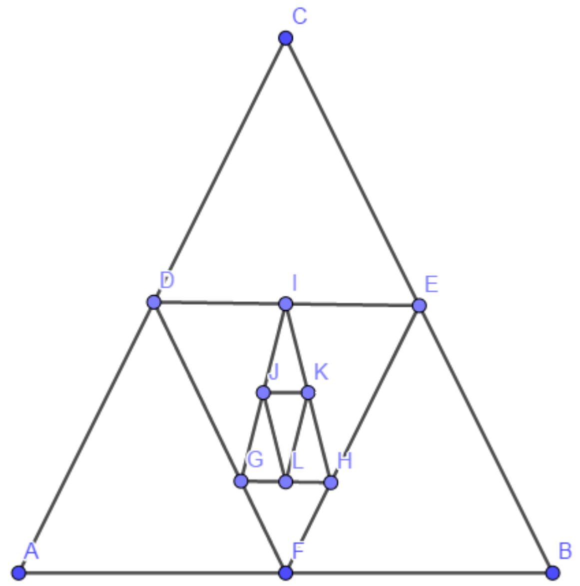
Виклад основного матеріалу (результатів) дослідження. Розглянемо особливості організації розв'язування геометричних задач з використанням різних видів функцій, заданих на множині натуральних чисел і, зокрема, геометричних прогресій.

Задача 1. *Дано рівносторонній трикутник із стороною a см. З його середніх ліній побудовано другий трикутник, з середніх ліній другого третій і так далі. Доведіть, що периметри цих трикутників утворюють геометричну прогресію.*

Доведення: Оскільки **середня лінія трикутника – відрізок, який з'єднує середини двох інших сторін, паралельний до третьої сторони трикутника і дорівнює її половині**, то:

Периметр першого трикутника $P_1 = 3a$ (тому що сторона першого трикутника дорівнює a, сума сторін трикутника – периметр). Сторона другого трикутника вже буде $\frac{1}{2}a$, а периметр $P_2 = 3\frac{1}{2}a = \frac{3}{2}a$. Сторона третього трикутника у два рази менша від сторони попереднього, тобто: $\frac{1}{2}a : 2 = \frac{1}{4}a$, а периметр $P_3 = 3\frac{1}{4}a = \frac{3}{4}a$ і так далі(сторона кожного разу зменшується у 2 рази). Очевидно, що периметри трикутників зменшуються: $P_1 = 3a$; $P_2 = \frac{3}{2}a$; $P_3 = \frac{3}{4}a$; … P_n , $n \in N$, перевіримо, чи виконується певна закономірність: $\frac{P_n}{P_{n-1}} = \frac{P_2}{P_1} = \frac{P_3}{P_2} = \frac{1}{2}$ – знаменник нашої геометричної прогресії, тобто периметри цих трикутників дійсно утворюють геометричну прогресію. Твердження доведено.

Примітка. $\frac{P_2}{P_1} = \frac{1}{2}$ – це ж і коефіцієнт подібності (трикутники є подібними, а периметри подібних фігур відносяться як коефіцієнт подібності. Цей факт є дуже корисним, бо іноді в задачах необхідно шукати площу другого або третього трикутника, побудованого із середніх ліній попереднього). Для наочності, побудуємо малюнок:



Зрозуміло, що цих трикутників буде нескінченна кількість (побудованих із середніх ліній), для себе варто побудувати хоча б три трикутники і побачити закономірність – далі ми зрозуміємо хід розв'язання задачі.

Тепер виникає питання, чи можна знайти суму площ(периметрів) усіх цих трикутників? Розв'яжемо схожі задачі нижче.

Задача 2. *Дано рівносторонній трикутник із стороною* a *см. Середини його сторін – вершини другого трикутника, середини сторін другого – вершини третього трикутника і так далі. Знайдіть суму: а) Периметрів усіх цих трикутників; б) Площу усіх цих трикутників.*

Розв'язання: а) Дана задача дуже схожа на попередню (задачу 1), тільки тут від нас вимагають знайти суму периметрів усіх цих трикутників. Врахуємо, що **середня лінія трикутника – відрізок, який з'єднує середини двох інших сторін, паралельний до третьої сторони трикутника і дорівнює її половині**, тоді, як вже було доведено в попередній задачі, що $\frac{P_2}{P_1} = \frac{P_3}{P_2} = \frac{1}{2} = q$, ми маємо справу з нескінченно спадною геометричною прогресією. Чому? Бо периметри трикутників кожного разу зменшуються і при цьому виконується умова $\frac{P_n}{P_{n-1}} = \frac{P_2}{P_1} = \frac{P_3}{P_2} = q$ (наступний ділити на попередній), якщо продовжити зменшування(в уяві), то дійдемо до такого числа, величиною якого можна знехтувати(не нуля, а десь до числа , яке приблизно нуль). Знайдемо суму периметрів усіх цих трикутників: $P_n = \sum_1^\infty P_n = \frac{P_1}{1-q} = \frac{3a}{1-0{,}5} = \frac{3a}{0{,}5} = 6a$ см. Задача а) розв'язана, перейдемо до розв'язання задачі б).

б) Для зручності, побудуємо таблицю, куди будемо заносити дані:

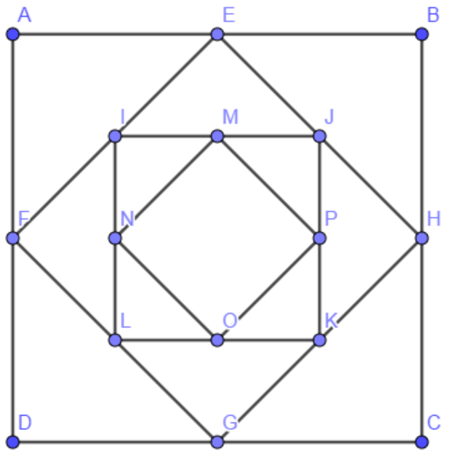
Сторона рівностороннього трикутника	*Площа рівностороннього трикутника*
a	$S_1 = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$
$\frac{a}{2}$	$S_2 = \frac{a^2\sqrt{3}}{16}$
$\frac{a}{4}$	$S_3 = \frac{a^2\sqrt{3}}{64}$

Очевидно, що площі трикутників зменшуються: $S_1 = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$; $S_2 = \frac{a^2\sqrt{3}}{16}$; $S_3 = \frac{a^2\sqrt{3}}{64}$; … S_n , $n \in N$, перевіримо, чи виконується певна закономірність: $\frac{S_n}{S_{n-1}} = \frac{S_2}{S_1} = \frac{S_3}{S_2} = \frac{1}{4}$ – знаменник нашої геометричної прогресії, тобто площі цих трикутників утворюють геометричну прогресію, знайдемо суму усіх площ цих трикутників: *сума усіх площ цих трикутників:* $S_n = \sum_1^\infty S_n = \frac{S_1}{1-q} = \frac{\frac{a^2\sqrt{3}}{4}}{1-0{,}25} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} : \frac{3}{4} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{4}{3} = \frac{a^2\sqrt{3}}{3}$ см^2. Задача б) розв'язана, **причому можна зробити перевірку**, як для задачі а), так і до задачі б). Суть: покладемо $a = 1$, і порахуємо суму периметрів 4-х трикутників, просто порахуємо і додамо. Далі підставимо одиницю туди, де ми рахували суму усіх периметрів (площ), результати мають бути приблизно рівними. Перевіримо для периметра: $a = 1$;

$P_1 = 3a$; $P_2 = \frac{3}{2}a$; $P_3 = \frac{3}{4}a$ і так далі, нам цікаві такі периметри, які дають зручні нам числа (a не десяті, соті , тисячні і т.д – ними нехтуємо), маємо: 3+1,5+0,75=5,25 – замало, візьмемо ще $P_4 = \frac{3}{8}a$: 3+1,5+0,75+0,375=5,625≈ 6 (їх сума ніколи не перевищить величину шість а) – усе вірно, виконаємо перевірку для площ: $a = 1$; $S_1 = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$; $S_2 = \frac{a^2\sqrt{3}}{16}$; $S_3 = \frac{a^2\sqrt{3}}{64}$ і так далі, додамо їх: $\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{16} + \frac{\sqrt{3}}{65} \approx 0{,}568$, а тепер підставимо у суму, що отримали: $\frac{\sqrt{3}}{3} \approx 0{,}577 \rightarrow 0{,}568 \approx 0{,}577$, причому сума площ ніколи не перевищить величину $\frac{a^2\sqrt{3}}{3}$) – усе вірно.

Задача 3. *Дано квадрат із стороною a см. Середини його сторін є вершинами другого квадрата, середини сторін другого – вершинами третього квадрата і так далі. Знайдіть відношення: $\frac{S_n}{P_n}$, де S_n – сума усіх площ цих квадратів, а P_n – сума усіх периметрів цих квадратів.*

Для наочності, побудуємо малюнок:



Почнемо з площі квадрата, як відомо – його (квадрата) площа: $S = a^2$. Побудуємо таблицю, куди будемо заносити дані (для зручності):

Сторона квадрата	*Площа квадрата*	*Периметр квадрата:*
a	$S_1 = a^2$	$P_1 = 4a$
$\frac{a\sqrt{2}}{2}$ (із прямокутного трикутника HBE, чи $CHG; CDF; AFE$ – вони усі рівні)	$S_2 = \frac{a^2}{2}$	$P_2 = 2a\sqrt{2}$
$KG = LG = \frac{a\sqrt{2}}{4} \rightarrow LK = \frac{a}{2}$	$S_3 = \frac{a^2}{4}$	$P_3 = 2a$

Очевидно, що площі квадратів зменшуються: $S_1 = a^2$; $S_2 = \frac{a^2}{2}$; $S_3 = \frac{a^2}{4}$; … S_n , $n \in N$, перевіримо, чи виконується певна закономірність: $\frac{S_n}{S_{n-1}} = \frac{S_2}{S_1} = \frac{S_3}{S_2} = \frac{1}{2}$ – знаменник нашої геометричної прогресії, тобто площі цих квадратів утворюють геометричну прогресію, знайдемо суму усіх площ цих квадратів: *сума усіх площ цих квадратів:* $S_n = \sum_1^\infty S_n = \frac{S_1}{1-q} = \frac{a^2}{1-0{,}5} = 2a^2$ см^2 . Перевіримо, чи виконується умова $\frac{P_n}{P_{n-1}} = \frac{P_2}{P_1} = \frac{P_3}{P_2} = q$ для периметрів: $\frac{P_n}{P_{n-1}} = \frac{P_2}{P_1} = \frac{P_3}{P_2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ – виконується, отже, периметри усіх цих квадратів теж утворюють геометричну прогресію. Знайдемо суму усіх периметрів цих квадратів: *сума усіх периметрів цих квадратів:* $P_n = \sum_1^\infty P_n = \frac{P_1}{1-q} = \frac{4a}{1-\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{4a}{\frac{2-\sqrt{2}}{2}} = \frac{8a}{2-\sqrt{2}}$ → поки не поспішаємо звільнятися від ірраціональності у знаменнику дробу. Розглянемо відношення *:* $\frac{\mathrm{S_n}}{\mathrm{P_n}}$, де $\mathrm{S_n}$ – сума усіх площ цих квадратів, а $\mathrm{P_n}$ – сума усіх периметрів цих квадратів: $\frac{\mathrm{S_n}}{\mathrm{P_n}} = 2a^2 : \frac{8a}{2-\sqrt{2}} = 2a^2 \cdot \frac{2-\sqrt{2}}{8a} = \frac{a(2-\sqrt{2})}{4} = a\frac{(2-\sqrt{2})}{4}$. Виконаємо **перевірку для площ** усіх цих квадратів (приблизно): у нас вийшло, що $S_n = 2a^2$ (сума усіх площ не перевищує величину $2a^2$, порахуємо площі, зручні нам(числа яких важливі), вважаємо, що $a = 1$: $S_1 + S_2 + S_3 + S_4 + S_5 + \cdots + S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \cdots + S_n$, n є N, причому величина $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} \approx 1{,}97$, інші площі дуже малі, але усе в сумі дасть $S_n = 2a^2$, якщо $a = 1$, то $S_n = 2$ – усе вірно. Тепер виконаємо перевірку для периметрів усіх цих квадратів (приблизно): у нас вийшло, що $P_n = \frac{8a}{2-\sqrt{2}}$ (сума усіх периметрів не перевищує величину $\frac{8a}{2-\sqrt{2}}$), порахуємо периметри, зручні нам(числа яких важливі), вважаємо, що $a = 1$: $P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + P_5 + \cdots + P_n = 4 + 2\sqrt{2} + 2 + \sqrt{2} + 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} + \cdots + S_n$, n є N, причому величина $4 + 2\sqrt{2} + 2 + \sqrt{2} + 1 +$

$\frac{\sqrt{2}}{2} \approx 12$, інші периметри малі, але усе в сумі дасть $P_n = \frac{8a}{2-\sqrt{2}}$, якщо $a = 1$, тоді $P_n = 13{,}65$.

Задача 4. *У кулю вписано куб з ребром* a *см, в цей куб вписано іншу кулю, в цю кулю куб і так далі. Знайдіть суму: а) Об'ємів усіх цих кубів; б) Об'ємів усіх цих куль. Що можна сказати про знаменник геометричної прогресії у задачах а,б?*

Перед розв'язанням цієї задачі звертаємо увагу на те, що: **куля є вписаною в куб, якщо вона торкається всіх його граней. Центр кулі знаходиться в точці перетину діагоналей куба. Радіус кулі – половина сторони куба. Куля є описаною навколо куба, якщо всі вершини куба знаходяться на поверхні кулі. Центр кулі – точка перетину діагоналей куба. Радіус кулі дорівнює половині діагоналі куба.**

Розв'язання: Знайдемо об'єм першого куба – це величина така: $V_1 = a^3$ см^3 , далі використаємо діагональ куба, а саме: $3x_2^2 = a^2 \to x_2 = \frac{a}{\sqrt{3}}$ і знайдемо об'єм другого куба – це величина така: $V_2 = \frac{a^3}{3\sqrt{3}}$ см^3, далі знайдемо об'єм третього куба (аналогічні кроки): $3x_3^2 = x_2^2 \to x_3 = \frac{x_2}{\sqrt{3}} = \frac{a}{3}$, це величина така: $V_3 = \frac{a^3}{27}$ $\to$ у нас: $V_1 + V_2 + V_3 + \cdots + S_n$ – дійсно геометрична прогресія(виконується умова, що $\frac{V_n}{V_{n-1}} = q = \frac{1}{3\sqrt{3}} \to V_n = \sum_1^\infty V_n = \frac{V_1}{1-q} = \frac{a^3}{1-\frac{1}{3\sqrt{3}}} = \frac{3\sqrt{3}(3\sqrt{3}+1)}{26}a^3$. Задача а) розв'язана. Перейдемо до розв'язання задачі б): знайдемо об'єм першої кулі – це величина така: $V_1' = \pi a^3 \frac{\sqrt{3}}{2}$, продовжуючи знаходити ці об'єми ми побачимо, що **знаменник цієї прогресії буде такий же самий, як і в попередній задачі**: $q = \frac{1}{3\sqrt{3}}$. У нас: $V_n' = \sum_1^\infty V_n' = \frac{V_1'}{1-q} = \frac{\pi a^3 \frac{\sqrt{3}}{2}}{1-\frac{1}{3\sqrt{3}}} = \pi a^3 \frac{9(3\sqrt{3}+1)}{52}$. Отже, бачимо, що якщо у кулю вписано куб з ребром а, в цей куб вписано іншу кулю, в цю кулю куб і так далі, то знаменник, геометричної прогресії, яку утворюють об'єми цих кубів і куль рівні.

Висновки та перспективи подальших пошуків у напрямі дослідження. Проведене дослідження дає підстави вважати продуктивними методичні умови використання функцій, визначених на множині натуральних чисел, до розв’язування геометричних задач. Це доцільно використовувати при підготовці уроків узагальнення і систематизації знань і вмінь учнів, при плануванні і проведенні уроків формування або застосування знань і умінь, при залученні учнів до розробки системи завдань навчального характеру або наборів завдань для вимірювання навчальних досягнень.

Список використаної літератури

1. Кушнір В., Ріжняк Р. Формування в учнів складних умінь використовувати моделювання у процесі розв’язування математичних задач інтегративного змісту // Математика в школі. – 2009. – № 5. – с. 13-17.
2. Кушнір В., Ріжняк Р. Розв’язування математичних задач інтегративного змісту засобами комп’ютерного моделювання // Математика в школі. – 2009. – № 10. – с. 34-39.
3. Колмогоров А. Н. Алгебра и начала анализа: учебник 10-11 кл. сред. шк. / Колмогоров, А. Н., Абрамов, А. М., Дудницын, Ю. П. - 2-е изд. - М.: Просвещение, 1991. - 319 с.
4. Шкіль М.І. Алгебра і початки аналізу : підруч. для 10 класу / М. І. Шкіль – К. : Зодіак-ЕКО, 2002. – 270 с.
5. Кушнір В., Кушнір Г., Ріжняк Р. Системне моделювання процесу розв’язування текстових математичних задач: кібернетичний підхід // Постметодика. – 2009. – № 4 (88). – с. 22-27.
6. Кушнір В. Системний аналіз педагогічного процесу: методологічний аспект. – Кіровоград: КДПУ, 2001. – 340с.
7. Кушнір В., Ріжняк Р. Формування в учнів умінь інтегративної діяльності з використанням наборів математичних задач, утворених задачною темою // Наукові записки КДПУ ім. В.Винниченка. – Випуск 90. – Серія: Педагогічні науки. – Кіровоград: РВВ КДПУ ім. В.Винниченка, 2010 – с. 156-161.